

# 基于非线性拟合的视频影长定位分析

## 摘要

作为现代社会信息记录和传递的重要途径,视频因可从多角度、多途径、全方位展示各类信息而得到越来越广泛的应用。其中,从视频中准确搜集有效长度信息,结合太阳影长定位技术,通过特定模型进行数值化计算后还原出拍摄时间、地点,是视频数据分析的重要应用。

本文采用数学化处理手段,首先以太阳高度角这一概念为媒介确立投影长度和观测时间、地点等参数之间的对应关系;并在实际测量出的散点实验数据基础上结合投影参数方程,通过非线性拟合确立出各个参数取值,回代还原出拍摄日期、地点等信息。最后将视频转化为单帧图像并截取有效投影区域进行处理,在二值化图像基础上遍历灰度矩阵搜寻出投影顶点,利用像素和实际长度的比例关系在误差修正后计算出实际投影长度,拟合参数、回代求解出可行的拍摄日期、拍摄地点组合。

第一步,构建影长参数模型,确立出投影长度受测量地纬度、赤纬角、时角、杆长四个因素影响,以上因素均直接或间接决定于测量时间、测量地点。在控制变量基础上分析各参数变化引起的影长变化情况,以问题一中 10 月 22 日直杆投影测量为例,绘图分析其影长从 9 时的 7.34 米随时间变化先减小后增大;且最小值为 12: 11 的 3.663 米。

第二步,确立非线性拟合模型,将散点实验数据和投影参数方程相拟合,利用最小二乘法,将拟合问题转化为无约束非线性规划,采用下降法进行最优解的循环降值搜寻,其中采用 Newton 公式和 Gauss-Newton 法确定迭代的方向;得出最优解后回代即可确定所需参数信息。其中,附件一测量地经度为 $108^{\circ}40'04''E$ ,纬度为 $19^{\circ}16'46''N$ (海南),杆长 2 米。附件二测量地经度为 $79^{\circ}45'16''E$ ,纬度为 $39^{\circ}55'31''N$ (新疆),杆长为 2 米,测量日期为 5 月 26 日和 7 月 21 日。附件三测量地经度为 $110^{\circ}14'23''E$ ,纬度为 $32^{\circ}53'15''N$ (湖北),杆长为 3 米,测量日期为 2 月 7 日和 11 月 8 日。

第三步,完善动态影长定位模型,将原始视频以一分钟为时间间隔单位截取 40 帧,并提取出 $840 \times 40$ 的矩形投影区域,在灰度图转化和增强对比度基础上该区域进行二值化;消除背景噪点影响后采用遍历搜索方式确定投影顶点像素位置,计算出投影像素长度并结合直杆实际长度得出像素和实际长度的比例关系;最后在考虑视角偏差等因素影响后进行误差修正,得出投影实际长度,并拟合回代出视频拍摄时间、拍摄地点等信息。其中,附件四视频在 2015 年 7 月 13 日拍摄于 $40^{\circ}36'57''N, 111^{\circ}14'26''E$ (内蒙古呼和浩特);若日期未知,则有多组参数组合可采用,其中最优解为 2015 年 6 月 23 日在 $40^{\circ}55'42''N, 110^{\circ}8'37''E$ (内蒙古包头)拍摄。

最后,本文对计算过程中产生的误差进行分析,并对前文每种拟合曲线的可信度采用标准化残差法进行计算,各曲线的拟合可信度均在 85% 以上,较好符合实际测量数据。另外,重点对第四问图像读取产生的误差进行分析,并转化为实际地图上给出误差区域范围。最后进行综合评价,对模型的优缺点进行分析,增强模型的实用性。

本文通过对利用视频的太阳影长定位技术进行完整建模分析,从影长参数模型构建到测量数据和曲线的拟合,以及最后应用时的视频数据提取,完整的展现出模型理论原理和执行流程,精确有效,切实可行。

## 关键词

太阳高度角 非线性拟合 最小二乘法 图像信息提取 投影计算

# 一、问题重述

作为现代社会信息记录和传递的重要途径，视频因可从多角度、多途径、全方位展示各类信息而得到越来越广泛的应用。通过一系列技术手段对视频进行处理，提取出有关信息并加以应用，更凸显出视频作为信息传递媒介的地位。其中，在一段视频中通过细节分析确定拍摄时间、地点，是视频数据分析的重要应用。

在多种现行的确定视频拍摄时间地点信息的方式中，利用视频中太阳投影与时间的变化关系进行分析的太阳影子定位技术是一种常用的方法。

为解决通过视频分析确定拍摄地点、拍摄时间这一问题，通过采用直杆这一最简单的测量标杆进行实验，利用对其太阳投影变化的分析，将问题分为三个部分进行讨论求解：

## **第一部分 确立太阳影长参数**

首先分析出太阳影长的影响参数，构建计算公式。并确定公式中各个参数的计算方法，将参数和测量时间、地点进行一一对应，探求其内在联系。同时可以在给定的一组测量时间、地点信息条件下，绘制出相应的影长随时间变化曲线。

## **第二部分 数据拟合**

在实际应用中，直接可以记录的数据是测量时间和影子长度，其保存形式为一组组的散点，故应建立模型通过对于散点的拟合反推出测量时间、地点的信息，实现初步应用。

## **第三部分 视频数据提取**

对于一段给定的视频，通过对关键帧图像的提取，在一定步骤的图像处理基础上，采用像素点和实际长度的比例关系求解出相应的影长，根据数据拟合的处理方法进行进一步计算，从而最终求解出相应的测量时间、测量地点，实现完整的视频定位流程。

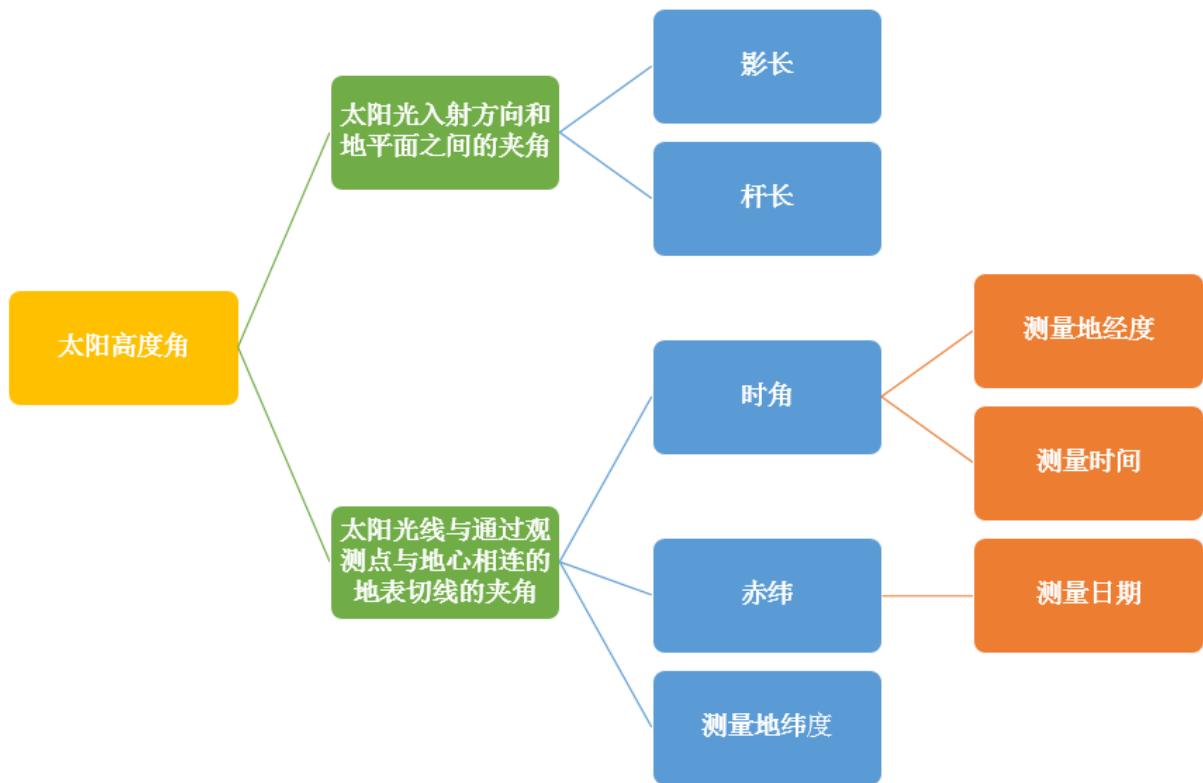
# 二、问题分析

## 2.1 确立太阳影长参数

通过分析，太阳影长和直杆长度通过太阳高度角这一概念进行联系。而太阳高度角又同时由测量地经纬度、测量日期、测量时间等因素确定。

考虑以太阳高度角为媒介，将一组完整的客观测量事件（测量地经纬度、测量时间、测量日期、杆长）和实验中求得的数据（影子实际长度）进行一一对应，并构建以影响参数为自变量，影长为因变量的非线性函数。

因对于同一测量事件，经纬度、日期、杆长等因素一旦确定即不再改变，故可以采用固定变量法对函数进行分析，依次探究各个参数的改变对于影长变化的影响。



模型说明图 1 各因素之间的关系

## 2.2 数据拟合

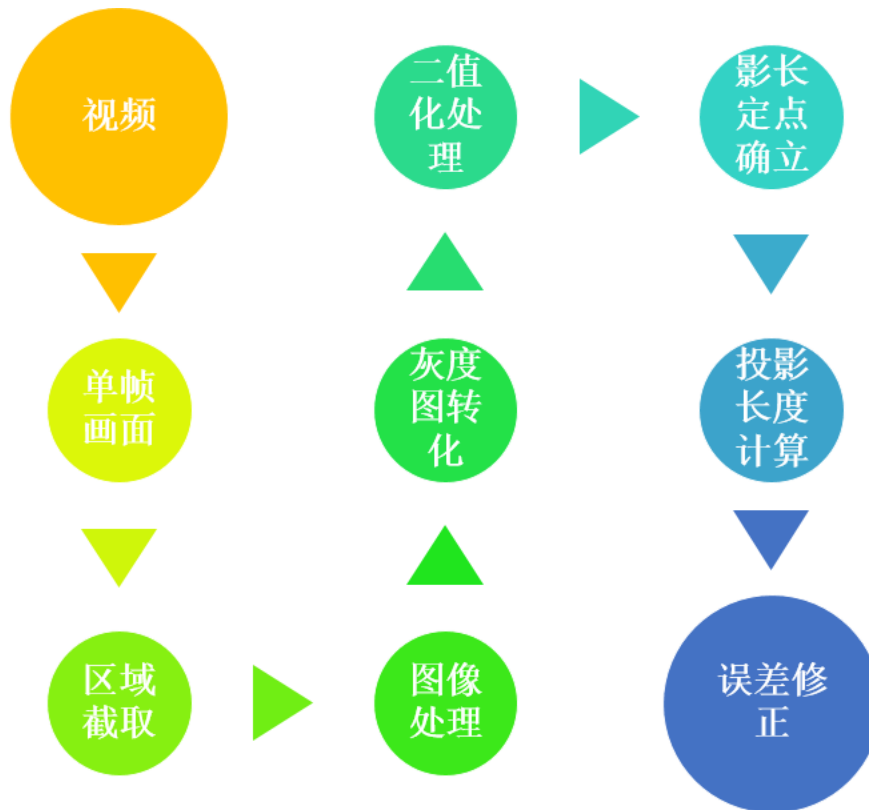


模型说明图 2 非线性拟合流程

因太阳影长公式和大部分参数的关系均为非线性，且实际测量数据为影长和对应测量时刻点，即为一个个散点组合，故考虑利用曲线拟合的方式进行相应参数推导，结合影长参数模型中各参数计算方法，求解出所需的信息。

在曲线拟合的过程中，利用最小二乘法，将拟合问题转化为无约束非线性规划问题，并采用下降法进行最优解的循环降值搜寻，并采用 Newton 公式和 Gauss-Newton 法确定迭代的方向，最终得出最优解向量中各值即为参数取值。

## 2.3 视频数据提取



模型说明图 3 视频数据提取流程

将连续的动态视频画面截取成静态单帧图片，在适当图像处理基础上利用比例关系进行计算求解，并考虑空间视角误差和读数偏差带来的影响进行误差修正，从而得到实际影长。结合视频拍摄的时间，构架影长和拍摄时间的对应关系，利用数据拟合得出测量日期和测量地点等信息，实现利用视频进行定位。

其中，在图像处理时选取有效的投影区域，采用灰度图转化、二值化处理等方式去除背景噪点影响，使投影图线清晰化，便于进行影长顶点精确搜索，从而得到较为准确的投影长度，方便回代拟合处理。

## 三、基本假设

- 1、忽略地球扁率的影响，将其视为正球体。
- 2、将太阳光视为平行光。
- 3、在某一特定日期下进行影长分析时，忽略地球绕日公转的影响。
- 4、忽略测量地海拔的影响。
- 5、忽略测量地地面坡度影响，认为均在水平地面上参与测量。

6、忽略相机器材性能因素对视频拍摄的影响。

## 四、符号说明

符号	含义
$O$	地球球心
$A$	观测点位置
$B$	太阳直射点位置
$\delta$	太阳赤纬
$\psi$	观测点地理纬度
$H$	太阳高度角
$t$	时角
$L$	直杆长度
$S$	投影长度
$n$	当年日因子
$\Gamma$	日角
$\lambda$	黄经度
$T_0$	北京时间
$T_H$	观测点地方时
$L_T$	观测点经度
$L_A$	观测点纬度
$G$	像素点灰度值
$T$	截图区域二值化阈值
$M$	二值化图像灰度矩阵

## 五、模型的建立及求解

### 5.1 影长参数模型

#### 5.1.1 太阳高度角计算

在几何学中，扁率是衡量椭球体扁平程度的物理量，且正球体的扁率为 0。在近 1 亿年中，地球的扁率恒定保持在 0.0035<sup>[1]</sup>，故可以将地球视为正球体。

地球绕日轨道为椭圆形，日地距离保持在 14710~15210 万千米之间<sup>[2]</sup>，故可以将太阳光视为平行光。

基于以上两点假设，首先计算太阳高度角如下：

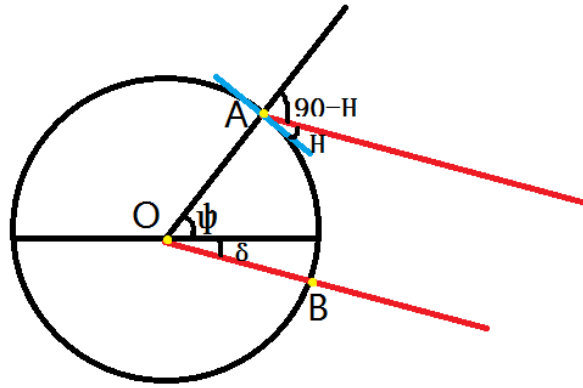


图 1 太阳直射点和观测点二维关系图

其中，O 为地球球心，A 为观测点（即直杆固定点），B 为太阳直射点， $\delta$  为太阳赤纬， $\psi$  为观测点地理纬度，H 为太阳高度角。

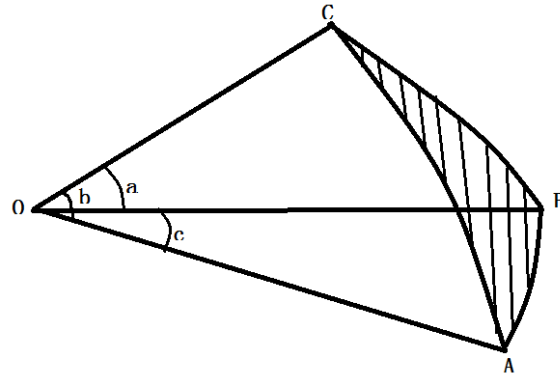


图 2 曲面三角形的余弦公式

结合曲面三角的余弦公式：

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (1)$$

将太阳直射点和观测点的位置关系恢复到三维球体空间进行分析：

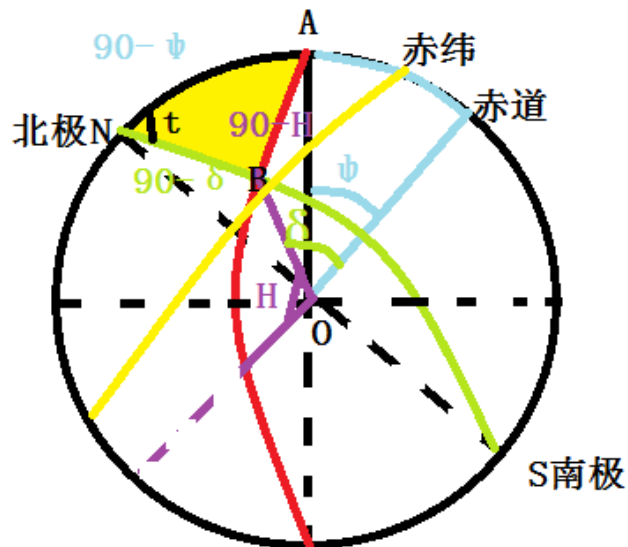


图 3 太阳直射点和观测点三维关系图

各角度取值分析如下：

表 1 各弧线段取值分析

角度	值	原因分析
$\angle AON$	$90-\psi$	因 A 为观测点，故 OA 所在平面和赤道平面的夹角 $\psi$ 即为其纬度，故 $\angle AON=90-\psi$
$\angle AOB$	$90-H$	因为 B 为直射点，A 为观测点，由太阳直射点和观测点关系可知 $\angle AOB=90-H$
$\angle NOB$	$90-\delta$	因为 B 为直射点，故 OB 所在平面和赤道平面的夹角 $\delta$ 即为赤纬角，故 $\angle NOB=90-\delta$

定义  $t$  为时角，其含义为地球的赤经和恒星时的差值，也即为过观测点 A 的经线和过直射点 B 的经线经度之差。

在球面三角形 ABN 中，应用曲面三角的余弦公式，可得：

$$\cos(90-H) = \cos(90-\delta)\cos(90-\varphi) + \sin(90-\delta)\sin(90-\varphi)\cos t \quad (2)$$

化简可得：

$$\sin H = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \quad (3)$$

### 5.1.2 影长计算

对于地球上的观测点，太阳高度角有两重含义：

一是指太阳光线与通过观测点与地心相连的地表切线的夹角；二是指太阳光入射方向和地平面之间的夹角。

设一长为  $L$  的直杆垂直立于地表，其投影长为  $S$ ，则由上述定义二知：

$$\tan H = \frac{L}{S} \quad (4)$$

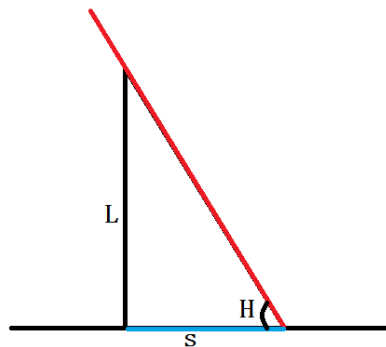


图 4 太阳高度角与直杆投影关系图

联立方程 (3) (4) ,求解得：

$$H = \arcsin(\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t) \quad (5)$$

$$S = \frac{L}{\tan[\arcsin(\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t)]} \quad (6)$$

### 5.1.3 参数分析

由上述分析和公式 (6) 可知，直杆投影影长受直杆长度  $L$ 、赤纬  $\delta$ 、测量地纬度  $\psi$ 、

时角  $t$  决定。

为更清晰表述各个参数的变化对影长的影响，采用固定变量法，将其他参数取值固定后进行分析。

### 因素1 直杆长度 $L$

根据假设，我们认定测量地的坡度为零，且直杆铅直竖立在水平地面上，故可以认定直杆在竖直方向上的有效长度即为其杆长  $L$ 。

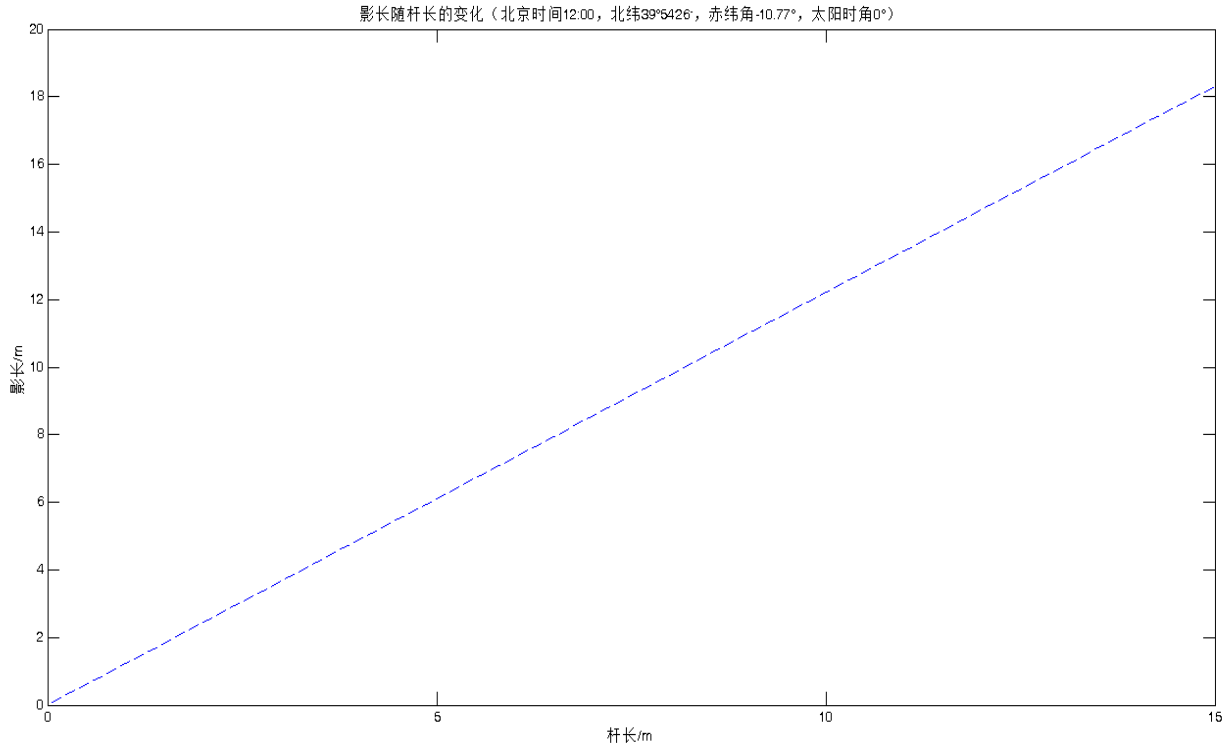


图 5 影长随杆长的变化图像

在北京时间 12: 00，观测点纬度  $\varphi = 39^{\circ}54'26'' N$ ，赤纬角  $\delta = -10.77^{\circ}$ ，太阳时角  $t = 0^{\circ}$  的参数取值下，影长随杆长的变化曲线如图 5。

由图可知：当杆长  $L$  从 0 起逐渐增大时，影长  $S$  与其成正比例递增的关系，比例系数由其他参量的取值决定。

### 因素2 赤纬

太阳中心和地球球心的连线与赤道平面的夹角即为赤纬角，其值受地球公转等因素的影响而在  $23.45^{\circ} N \sim 23.45^{\circ} S$  的范围内进行周期变化<sup>[3]</sup>。

现行文献内对于赤纬的计算方法种类繁多，赤纬的精确程度也直接影响影长计算值。在保证精确度的前提下为方便计算，采用 Spencer 于 1971 年提出的赤纬算法进行计算<sup>[4]</sup>。

设  $n$  为当年日因子，即测量日期与当年 1 月 1 日之间的天数间隔。

设  $\Gamma$  为日角，其计算公式为：

$$\Gamma = \frac{2\pi(n-1)}{365} \quad (7)$$

则赤纬  $\delta$  的计算公式为：



$$\delta = 0.00698 - 0.399912 \cos \Gamma + 0.070257 \sin \Gamma - 0.006758 \cos(2\Gamma) + 0.000907 \sin(2\Gamma) - 0.002697 \cos(3\Gamma) + 0.00148 \sin(3\Gamma) \quad (8)$$

根据公式 (8)，当  $n$  在区间  $[0,365]$  之间变化时，赤纬角的变化情况如下：

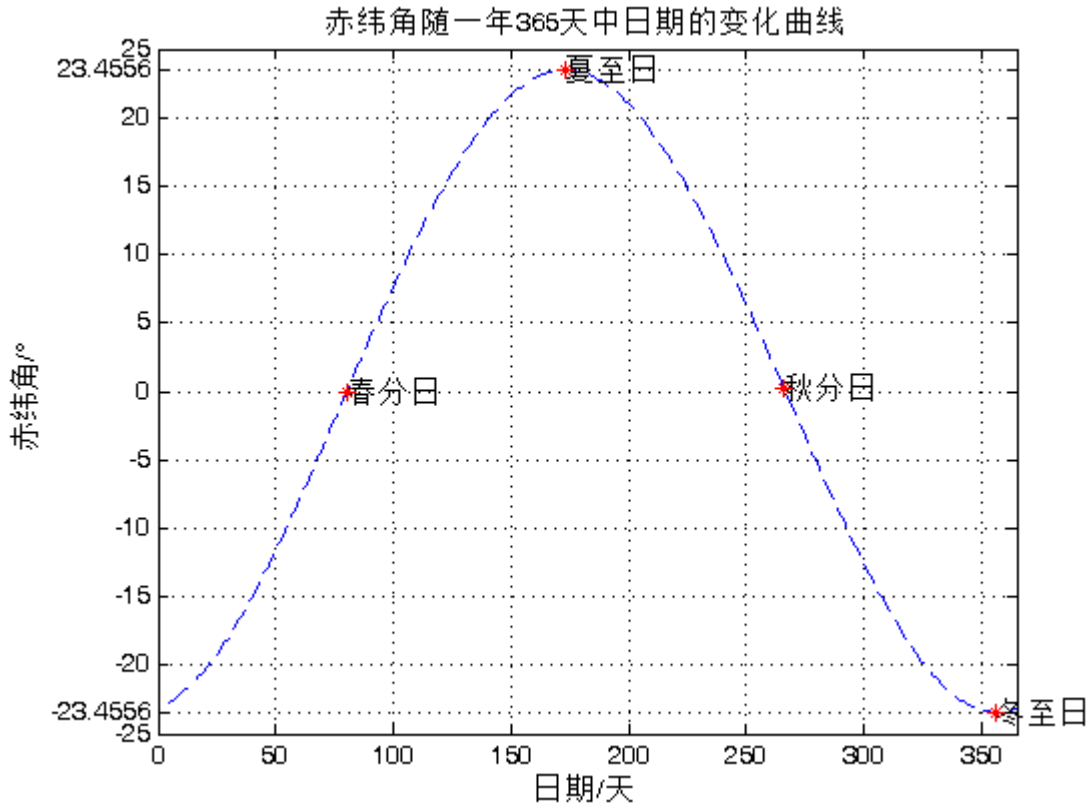


图 6 赤纬角随日因子  $n$  的变化曲线

在北京时间 12:00，观测点纬度  $\varphi = 39^{\circ}54'26''N$ ，太阳时角  $t = 0^{\circ}$ ，杆长  $L=3m$  的参数取值下，影长随赤纬角的变化曲线如图 7。

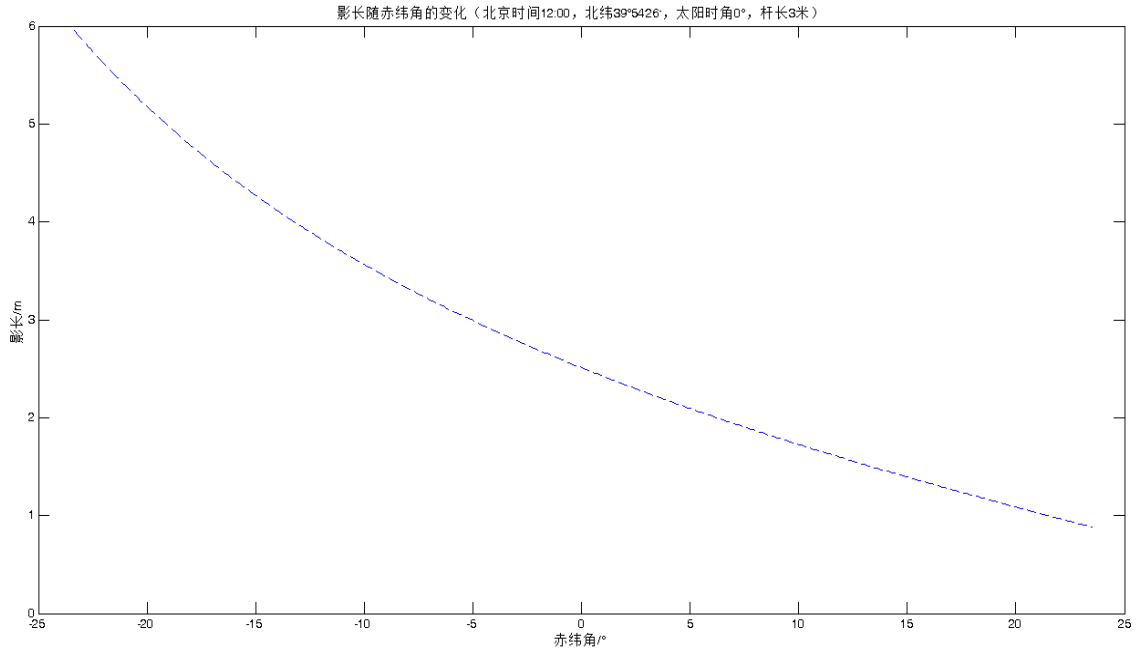


图 7 影长随赤纬角的变化图像

由图 7 可知：当赤纬角在从南回归线向北回归线变化时，纬度  $\varphi = 39^{\circ}54'26'' N$ 、太阳时角  $t = 0^{\circ}$  的观测地与直射点之间的纬度差逐渐减小，故所测的影长也逐渐递减。

### 因素3 测量地纬度 $\psi$

纬度是指测量地与地球球心的连线和地球赤道面所成的线面角，北纬取正，南纬取负，且其值大小为 $[0,90]$ 。

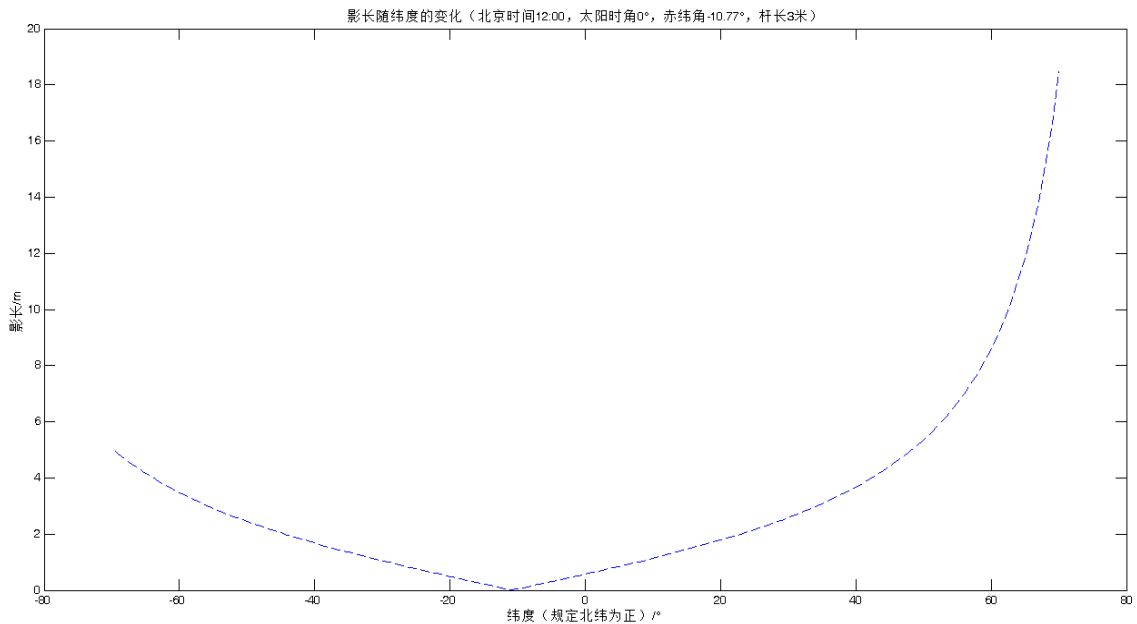


图 8 影长随测量地纬度的变化图像

在北京时间 12: 00，太阳时角  $t = 0^{\circ}$ ，赤纬角  $\delta = -10.77^{\circ}$ ，杆长  $L=3m$  的参数取值

下，影长随观测点纬度的变化曲线如图 8。

由上图可知，当测量点纬度和赤纬重合时，太阳直射，影长为 0。观测点自直射点起纬度向南北两侧递增时，影长也逐渐增加；且在南北两极极地圈之外的影长曲线关于直射点对称分布。

#### 因素4 时角 $t$

5.1.1 中已阐述时角  $t$  为过观测点和直射点的两条经线经度之差。因经度和时区可以互相转化，故时角可以由时间之差进行衡量。

因测量数据中所列时间均为北京时间，故首先应将北京时间  $T_0$  和观测点的地方时  $T_H$  进行转化。北京时间为  $120^\circ E$  地区地方时<sup>[5]</sup>，设观测点的经度为  $L_T$ ，其中东经为正西经为负，则：

$$T_H = T_0 + \frac{L_T - 120^\circ}{15^\circ} \quad (9)$$

$$t = (T_H - 12) \times 15 \quad (10)$$

在北京时间 12: 00，赤纬角  $\delta = -10.77^\circ$ ，测量地纬度  $\varphi = 39^\circ 54' 26'' N$ ，杆长  $L=3m$  的参数取值下，影长随时角的变化曲线如图 9。

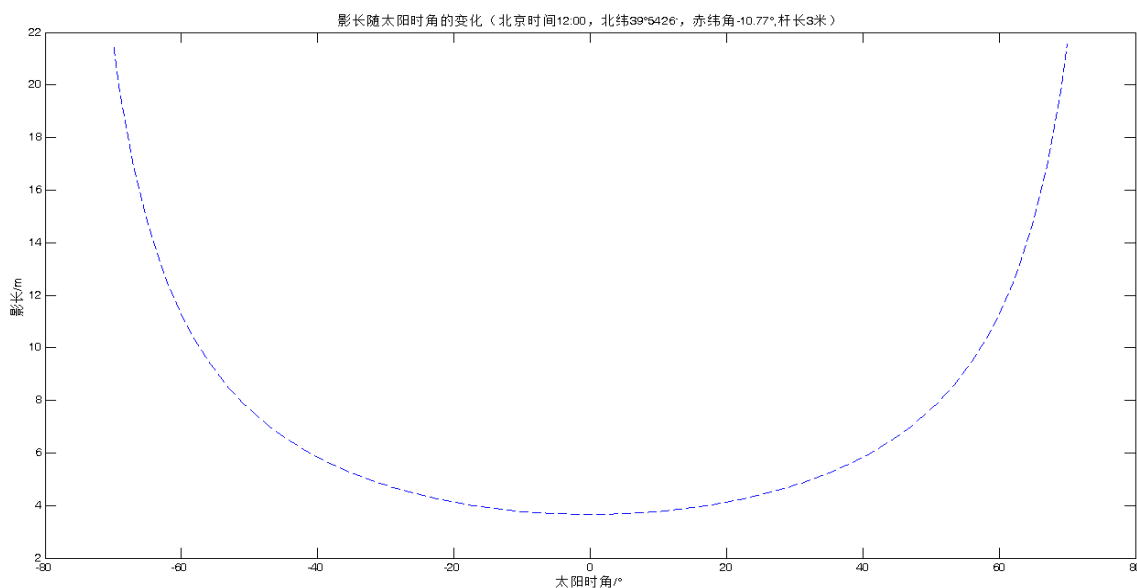


图 9 影长随时角的变化图像

由图可知，当太阳时角为 0 时，地方时位于正午 12: 00，此时测量地与直射点的距离最短，故影长最小。当太阳时角从  $-90^\circ \sim 90^\circ$  变化时，影长先逐渐减小再逐渐递增，并且关于太阳时角为 0 的时刻对成分布。

#### 5.1.4 模型求解

根据 5.1.3 的参数分析，对于问题一中天安门直杆各个参数值计算如下：

表 2 参数取值

参数名称	参数值
------	-----

观测点经度 $L_T$	$L_T=116^{\circ}23'29'' E$
观测点纬度 $L_A$	$L_A=39^{\circ}54'26'' N$
直杆长度 $L$	$L=3m$
测量地纬度 $\psi$	$\varphi = L_A = 39^{\circ}54'26'' N$
日因子 $n$	$n=294$
赤纬 $\delta$	$\delta = 10.77^{\circ} S$
北京时间 $T_0$	$T_0=9\sim 15$
时角 $t$	$t = -48.6084^{\circ} \sim 41.3916^{\circ}$

将表 2 中各个参数数值带入公式 (6)，绘制出北京时间 9 时至 15 时天安门广场 3 米直杆影长变化曲线如下：

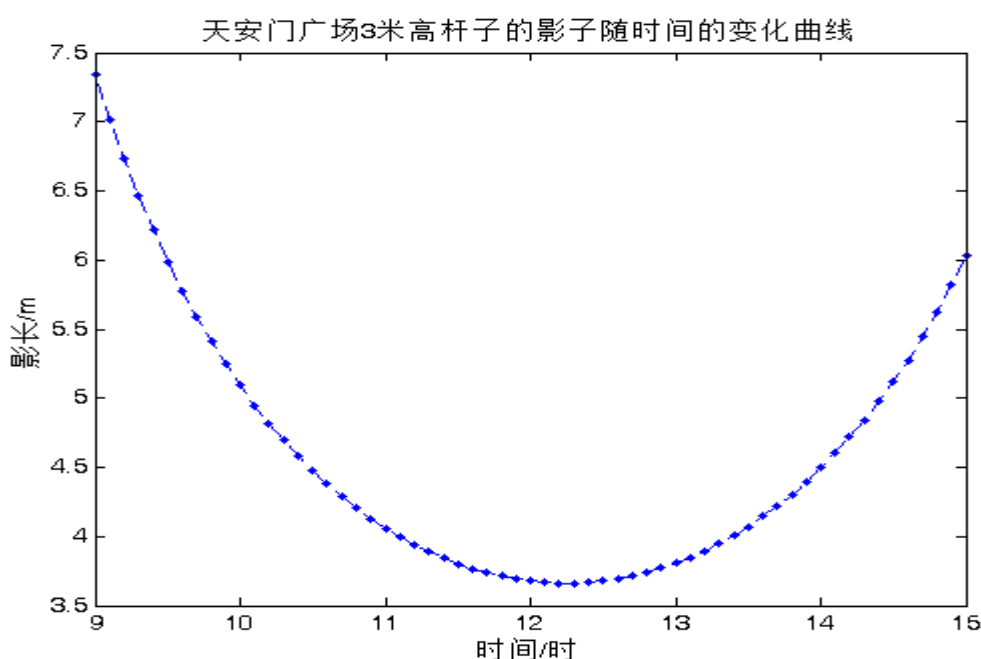


图 10 问题一天安门直杆影长变化曲线

因在对时角的分析中已经指出北京时间为  $120^{\circ} E$  地区地方时而非北京当地地方时，故图 10 中影长最低点的位置并非正午 12 时，而是稍滞后一部分时间。在 9 时~15 时，影子长度先减小后增大，最大值出现在 9 时，为 7.34 米；最小值出现在 12: 11，为 3.663 米。变化曲线关于 12: 11 对称。

## 5.2 非线性拟合模型

### 5.2.1 模型分析

由影长参数模型可知，影子长度  $S$  要由直杆长度  $L$ 、赤纬  $\delta$ 、测量地纬度  $\psi$ 、时角  $t$  决定，且五者之间的关系由公式 (6) 进行约束。

对于一次完整的定点测量，可以认定直杆长度、测量日期、测量地经纬度均为恒定值，仅在时间变化下记录影长的改变。根据公式 (6)，影长仅与时角值有关，公式中其他变量均可视为恒定参数的组合。如若知晓多个时间点下定点测量的影长数据，即可根

据影长和时角一一对应关系回归拟合出其他参数值，从而反推出测量地点、测量时间等信息。

### 5.2.2 模型建立

由上述分析可知，问题已经转化为对二维数据进行曲线拟合求解参数，现采用最小二乘法<sup>[6]</sup>构建下述拟合模型。

#### 第一步 建立最小二乘拟合模型

对于一组数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ ，拟合已知函数，其中  $\bar{a}$  为待定系数，使得

$\sum_{i=1}^n |f(\bar{a}, x_i) - y_i|^2$  最小，且  $f$  对于  $\bar{a}$  某些分量是非线性函数。

为衡量拟合的准确程度，记误差：

$$r_i(\bar{a}) = f(\bar{a}, x_i) - y_i, \bar{r}(\bar{a}) = (r_1(\bar{a}), \dots, r_n(\bar{a}))^T \quad (11)$$

于是拟合问题转化为如下的优化模型：

$$\min_{\bar{a}} R, R = \frac{1}{2} \bar{r}^T(\bar{a}) \bar{r}(\bar{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |f(\bar{a}, x_i) - y_i|^2 \quad (12)$$

上述模型转化为求解无约束非线性规划问题。

#### 第二步 无约束非线性问题转化

$$\min_x f(\bar{x}), \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n \quad (13)$$

记  $f(\bar{x})$  的梯度为：

$$\nabla f(\bar{x}) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})^T \quad (14)$$

其中  $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} (i=1, 2, \dots, n)$  为偏导数。

记  $f(\bar{x})$  的 Hessian 矩阵为：

$$H = \nabla^2 f = (f_{x_i} f_{x_j}) \quad (15)$$

$$f_{x_i} f_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

对于上述多元函数， $\bar{x} = \bar{x}^*$  为最优解的充分必要条件为：

$$\nabla f(\bar{x}^*) = 0, \nabla^2 f(\bar{x}^*) \text{ 正定} \quad (17)$$

根据上述的充分必要条件，理论上为寻求最优解需要求解方程组  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ 。

#### 第三步 下降法寻找最优解

对于在  $n$  维空间里的一点  $x^{(k)}$ ，在确定一个搜索方向和搜索步长的情况下，使函数在下一点的函数值  $f(\bar{x})$  下降，从而达到寻找出最优解的目地。

下降法的步骤如下：

首选选取一个初始解  $\bar{x}^0$ ；

第二步确定一个在  $n$  维空间  $R^n$  内的下一步搜索方向  $\bar{d}^k$ ；

第三步根据上述方向  $\bar{d}^k$  确定搜索步长  $b^k \in R$ ，且需要满足以下条件：

$$\begin{cases} \bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + b^k \bar{d}^k \\ f(\bar{x}^{k+1}) < f(\bar{x}^k) \end{cases} \quad (18)$$

第四步，判断  $\bar{x}^{k+1}$  是否符合迭代终止原则，若符合则输出最优解  $\bar{x}^* = \bar{x}^{k+1}$ ；否则重新

执行第二步和第三步。

#### 第四步 Newton 迭代公式确定 Newton 方向 $\vec{d}^k$

对于多变量非线性方程组，利用 Newton 迭代公式可以方便给出其解。

方程组形式如下：

$$\begin{cases} \vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^T \\ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases} \quad (19)$$

设  $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$  是方程组 (18) 的第 k 步近似解，现对  $\vec{x}^{(k)}$  进行 Taylor 展开，并将线性化后的  $\vec{x}$  替换为  $\vec{x}^{(k+1)}$ ，其展开形式为：

$$f_i(\vec{x}^{(k+1)}) = f_i(\vec{x}^{(k)}) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_1} (\vec{x}_1^{(k+1)} - \vec{x}_1^{(k)}) + \dots + \frac{\partial f_i(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_n} (\vec{x}_n^{(k+1)} - \vec{x}_n^{(k)})$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

记  $\vec{F}(\vec{x})$  的 Jacobi 矩阵为：

$$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (21)$$

则可以将 (19) 式改写为：↵

$$\vec{F}(\vec{x}^{(k+1)}) = \vec{F}(\vec{x}^{(k)}) + \vec{F}'(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) \quad (22)↵$$

在  $\vec{F}'(\vec{x}^{(k)})$  可逆的前提下，可以由 (21) 求解出 (19) 的 Newton 迭代公式：↵

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - [\vec{F}'(\vec{x}^{(k)})]^{-1} \vec{F}(\vec{x}^{(k)}) \quad (23)↵$$

对于求解无约束非线性问题中必要条件方程组  $\nabla f(\vec{x}) = 0$ ，将  $\nabla f(\vec{x})$  视为 (22) 中的  $\vec{F}(\vec{x})$ ，则 (22) 变为：↵

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - [\nabla^2 f(\vec{x}^{(k)})]^{-1} \nabla f(\vec{x}^{(k)}) \quad (24)↵$$

此时搜索步长  $b^k = 1$ ，搜索方向为 Newton 方向  $\vec{d}^k$ ：↵

$$\vec{d}^k = -[\nabla^2 f(\vec{x}^{(k)})]^{-1} \nabla f(\vec{x}^{(k)}) \quad (25)↵$$

因为当 Hessian 矩阵  $H = \nabla^2 f$  正定时才满足最优解的条件，所以  $\vec{d}^k$  满足：↵

$$\nabla^2 f(\vec{x}^{(k)}) \vec{d}^k = -\nabla f(\vec{x}^{(k)}) \quad (26)↵$$

#### 第五步 Gauss-Newton 法求解 $\vec{d}^k$ ↵

对于第一步 (11) 式的误差  $\vec{r}(\vec{a})$ ，记其 Jacobi 矩阵为：↵

$$J(\vec{a}) = \left( \frac{\partial r_i}{\partial a_j} \right)_{n \times m} \quad (27)↵$$

则：↵

$$\nabla R = J^T(\vec{a})r(\vec{a}) \quad (28)$$

$$|\nabla^2 R = J^T(\bar{a})J(\bar{a}) + \bar{S} \quad (29)$$

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n r_i(\bar{a})\nabla^2 r_i(\bar{a}) \quad (30)$$

利用 Gauss-Newton 法,参照线性方程解法将  $\bar{S}$  忽略后, 将 (28) (29) 代入 (26),  $\bar{d}^k$  可以由以下公式解出:

$$J^T(\bar{a}^k)J(\bar{a}^k)d^k = -J^T(\bar{a}^k)r(\bar{a}^k) \quad (31)$$

此时可以将解代回第三步的下降法,确立无约束非线性问题的最优解,最后将问题回归到第一步最小二乘法拟合模型中,得到各个参数的最优解组合。

### 5.2.3 模型求解

因为附件一二三所给数值均为影子长度的横纵坐标值, 故先以直杆底端为原点 0, 水平地面为 X-Y 平面建立坐标系如下:

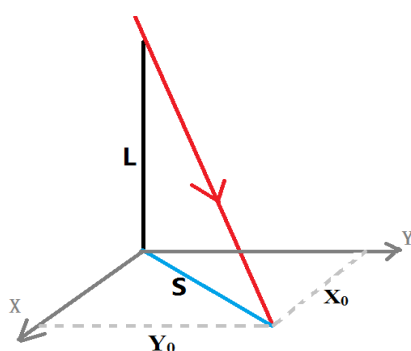


图 11 测量时所用坐标系

其中, 影长 S 和每一时刻下横纵坐标的关系为:

$$S = (X_0^2 + Y_0^2)^{1/2} \quad (32)$$

#### 附件一 已知日期、时间、影长

由公式 (32) 计算各个时刻影子长度值如下表:

表 3 附件一各个测量时刻下影子长度值

北京时间 $T_0$	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影长 S(米)
14:42	1.0365	0.4973	1.149626
14:45	1.0699	0.5029	1.182199
14:48	1.1038	0.5085	1.215297
14:51	1.1383	0.5142	1.249051
14:54	1.1732	0.5198	1.283195
14:57	1.2087	0.5255	1.317993
15:00	1.2448	0.5311	1.353364
15:03	1.2815	0.5368	1.389387
15:06	1.3189	0.5426	1.426153
15:09	1.3568	0.5483	1.4634
15:12	1.3955	0.5541	1.501482
15:15	1.4349	0.5598	1.540232
15:18	1.4751	0.5657	1.579853

15:21	1.516	0.5715	1.620145
15:24	1.5577	0.5774	1.661271
15:27	1.6003	0.5833	1.703291
15:30	1.6438	0.5892	1.746206
15:33	1.6882	0.5952	1.790051
15:36	1.7337	0.6013	1.835014
15:39	1.7801	0.6074	1.880875
15:42	1.8277	0.6135	1.927918

由题目已知条件，测量日期为 2015 年 4 月 18 日，测量时间为北京时间 14: 42~15: 42，结合表 3 各个时刻下影长数据代入影长参数模型的公式 (6)，并且利用非线性拟合模型，计算出测量地点的经度、纬度和杆长，结果如下：

测量地经度  $108^{\circ}40'04''E$ ；测量地纬度  $19^{\circ}16'46''N$ ；杆长 2.0356 米。

经过经纬定位后，该测量点位于海南省西部沿海地区，其地理位置如图 12 所示。



图 12 附件一测地点地理位置

带入此组参数结果，得到的曲线和原始散点拟合程度如图 13 所示，本符合要求。



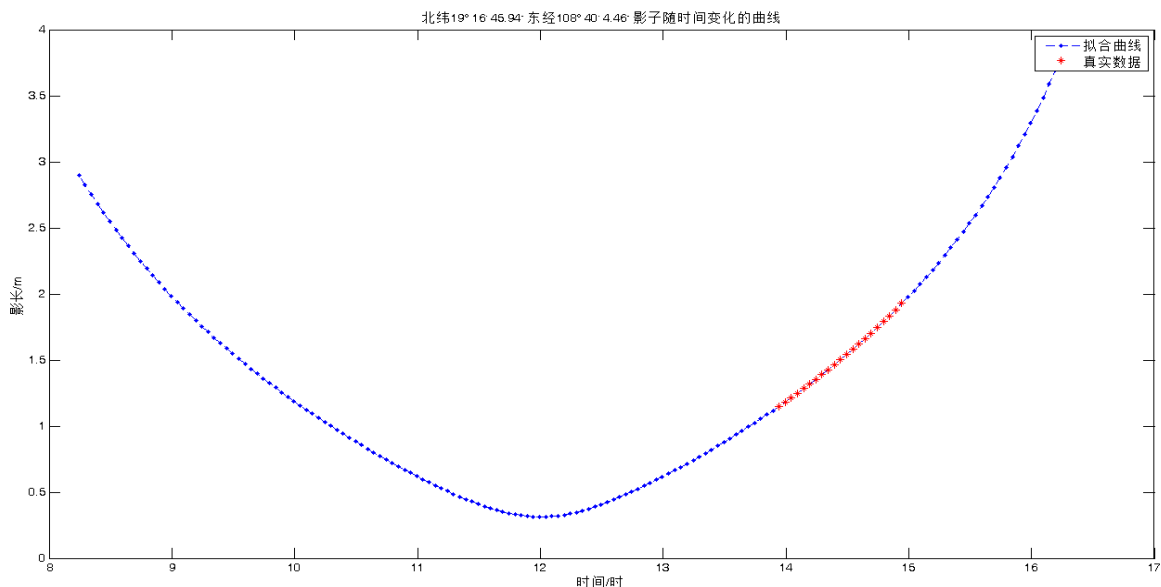


图 13 附件一参数拟合图

### 附件二 已知时间、影长

由题目已知条件，仅有测量时刻和影子长度的数据给定，要求拟合出测量地点经纬度、杆长、测量日期等条件。

利用公式 (32) 计算出各个时刻下影子的长度得到表 4，然后在拟合过程中利用测量时间和影长的组合，计算出测量地经度、纬度、杆长和日期。

因为此时已知条件极少，组合情况较多，故相较于附件一在利用非线性拟合模型求解的过程中，增加对误差范围的标定，从而在较小误差范围内得到多组可行的参数组合。

(11) 定义误差  $r_i(\bar{a}) = f(\bar{a}, x_i) - y_i$ ,  $\bar{r}(\bar{a}) = (r_1(\bar{a}), \dots, r_n(\bar{a}))^T$ , 现取一值  $r$  作为一组解的误差衡量标准，其计算如下：

$$r = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n |f(\bar{a}, x_i) - y_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} (i=1, 2, \dots, n) \quad (33)$$

对于附件二的数据，当运行出的一种参数组合符合如下标准：

$$r < 7 \times 10^{-6} \quad (34)$$

认定该参数组合所绘制的曲线较好拟合原始数据，为一可能取值。

表 4 附件二各个测量时刻下影子长度值

北京时间 $T_0$	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	影长 S (米)
12:41	-1.2352	0.173	1.247256
12:44	-1.2081	0.189	1.222795
12:47	-1.1813	0.2048	1.198921
12:50	-1.1546	0.2203	1.175429
12:53	-1.1281	0.2356	1.15244
12:56	-1.1018	0.2505	1.129917
12:59	-1.0756	0.2653	1.107835
13:02	-1.0496	0.2798	1.086254
13:05	-1.0237	0.294	1.065081
13:08	-0.998	0.308	1.044446

13:11	-0.9724	0.3218	1.024264
13:14	-0.947	0.3354	1.00464
13:17	-0.9217	0.3488	0.985491
13:20	-0.8965	0.3619	0.96679
13:23	-0.8714	0.3748	0.948585
13:26	-0.8464	0.3876	0.930928
13:29	-0.8215	0.4001	0.913752
13:32	-0.7967	0.4124	0.897109
13:35	-0.7719	0.4246	0.880974
13:38	-0.7473	0.4366	0.865492
13:41	-0.7227	0.4484	0.850504

附件二中数据利用模型计算出的位置、日期、杆长以及误差组合如下：

表 5 附件二误差范围内可能参数组合及最优解

经度（东经）				纬度（北纬）				杆长	日期	误差
弧度表示	度分秒表示			弧度表示	度分秒表示					
	度	分	秒		度	分	秒			
1.388725	79	34	5.075701	0.686992	39	21	42.22965	1.971574	141	6.97E-06
1.389586	79	37	2.635933	0.689559	39	30	31.69024	1.979629	142	6.60E-06
1.390415	79	39	53.59249	0.692055	39	39	6.525583	1.987482	143	6.35E-06
1.391212	79	42	38.05163	0.694479	39	47	26.53023	1.99513	144	6.21E-06
1.391978	79	45	16.11371	0.69683	39	55	31.50459	2.002568	145	6.18E-06
1.392714	79	47	47.87339	0.699107	40	3	21.25506	2.009792	146	6.25E-06
1.39342	79	50	13.42015	0.70131	40	10	55.594	2.016797	147	6.42E-06
1.394096	79	52	32.83873	0.703437	40	18	14.33977	2.02358	148	6.65E-06
1.394742	79	54	46.20854	0.705488	40	25	17.31693	2.030136	149	6.94E-06
1.394787	79	54	55.43241	0.70563	40	25	46.68881	2.030592	197	6.97E-06
1.394145	79	52	43.09409	0.703594	40	18	46.75054	2.024082	198	6.67E-06
1.393475	79	50	24.79373	0.701483	40	11	31.2559	2.017348	199	6.43E-06
1.392775	79	48	0.456648	0.699297	40	4	0.386781	2.010395	200	6.27E-06
1.392046	79	45	30.00363	0.697038	39	56	14.3309	2.003226	201	6.18E-06
1.391286	79	42	53.35073	0.694705	39	48	13.28176	1.995846	202	6.20E-06
1.390496	79	40	10.4089	0.692302	39	39	57.43852	1.98826	203	6.33E-06
1.389675	79	37	21.08385	0.689827	39	31	27.00599	1.980472	204	6.57E-06
1.388823	79	34	25.27563	0.687283	39	22	42.19452	1.972485	205	6.92E-06

对于附件二,共有 18 组可能的组合可以较好拟合原始数据,结果如表 5 所示.18 组结果基本围绕两个最优解(黄色标注)分布,故可以认定这两组最优解即为满足附件二数据的结果。

观察两组最优解，其经纬度、杆长近似相等，唯有日期有较大差别，故可以认为两组解为同一观测点采用同一直杆在不同日期下所测的结果。测量地经度  $79^{\circ}45'16''E$ ，纬度  $39^{\circ}55'31''N$ ，杆长为 2 米。测量日期分别为 5 月 26 日和 7 月 21 日，基本关于夏至对称分布，结果符合 5.1.3 的参数分析。

经过经纬定位后，该测量点位于新疆地区西北部，其地理位置如图 14 所示：

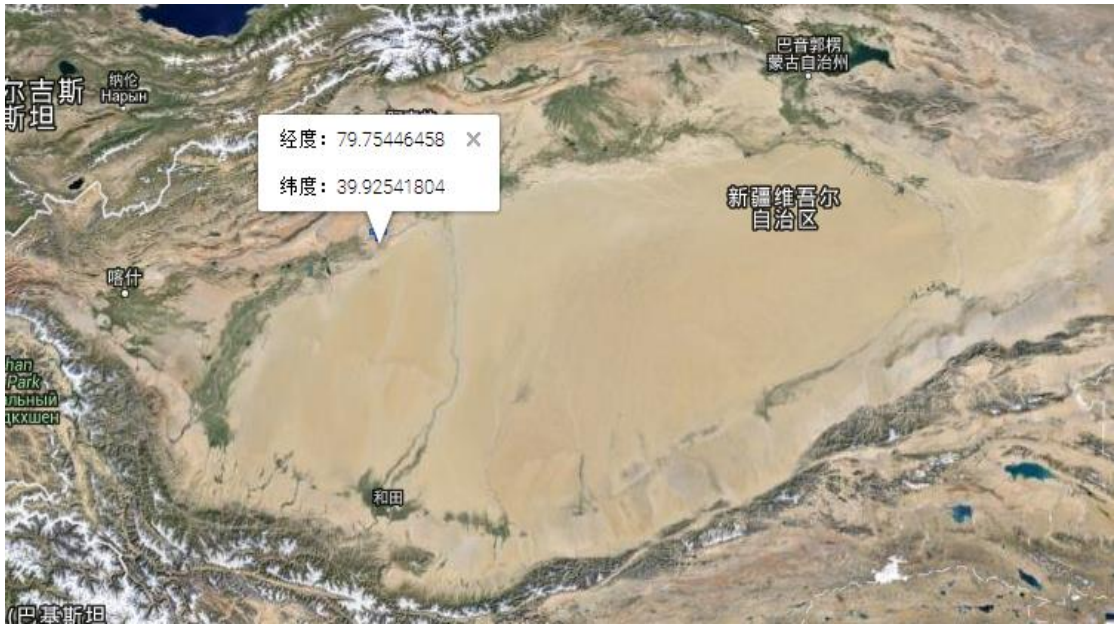


图 14 附件二观测地点地理位置

带入此组参数结果，得到的曲线和原始散点拟合程度如图 15 所示，符合要求。

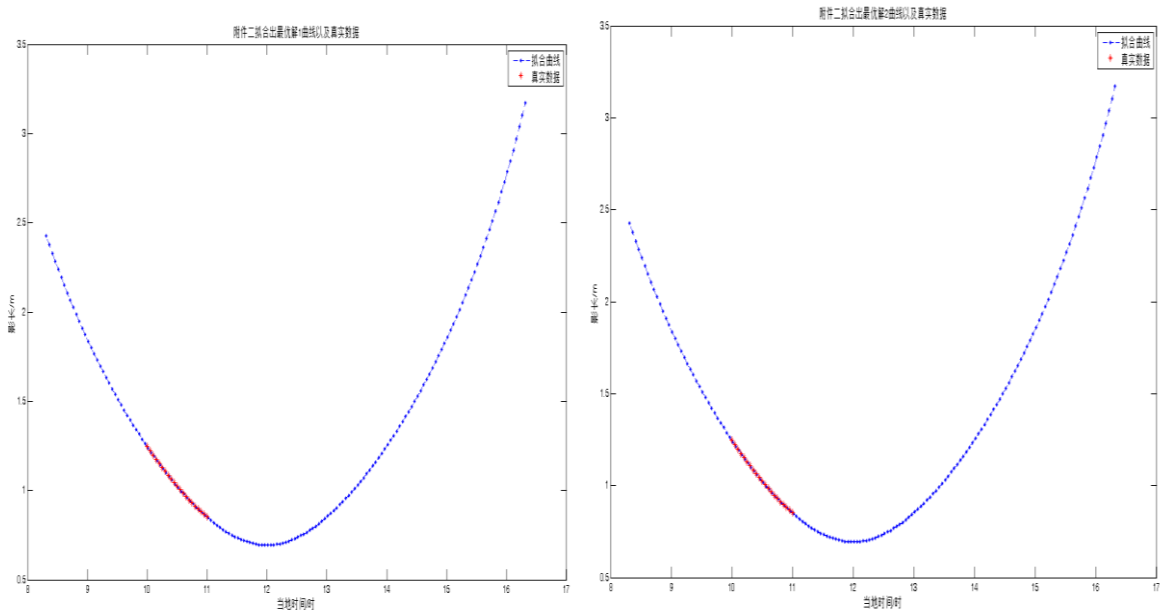


图 15 附件二两种日期下参数拟合图

### 附件三 已知时间、影长

附件三和附件二条件数目相同，求解的目标相同，仅在误差衡量标准  $r$  的取值范围上略作区分：

$$r < 10^{-5} \quad (35)$$

认定该参数组合所绘制的曲线较好拟合原始数据，为一可能取值。

表 5 附件三各个测量时刻下影子长度值

北京时间 $T_0$	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	影长 S (米)
------------	----------	----------	----------

13:09	1.1637	3.336	3.533142
13:12	1.2212	3.3299	3.546768
13:15	1.2791	3.3242	3.561798
13:18	1.3373	3.3188	3.578101
13:21	1.396	3.3137	3.595751
13:24	1.4552	3.3091	3.614934
13:27	1.5148	3.3048	3.635426
13:30	1.575	3.3007	3.657218
13:33	1.6357	3.2971	3.680541
13:36	1.697	3.2937	3.705168
13:39	1.7589	3.2907	3.731278
13:42	1.8215	3.2881	3.758918
13:45	1.8848	3.2859	3.788088
13:48	1.9488	3.284	3.818701
13:51	2.0136	3.2824	3.85081
13:54	2.0792	3.2813	3.884585
13:57	2.1457	3.2805	3.919912
14:00	2.2131	3.2801	3.956876
14:03	2.2815	3.2801	3.995535
14:06	2.3508	3.2804	4.035751
14:09	2.4213	3.2812	4.077863

附件三中数据利用模型计算出的位置、日期、杆长以及误差组合如下：

表 6 附件三误差范围内可能参数组合及最优解

弧度表示	经度（东经）			纬度（北纬）			杆长	日期	误差	
	度分秒表示			度分秒表示						
	度	分	秒	度	分	秒				
1.925248	110	18	30.86499	0.565248	32	23	10.80211	2.968244	33	9.81E-06
1.924953	110	17	30.13882	0.567351	32	30	24.60611	2.986045	34	9.03E-06
1.924655	110	16	28.60644	0.56951	32	37	49.94692	3.004123	35	8.44E-06
1.924353	110	15	26.30983	0.571725	32	45	26.645	3.022476	36	8.10E-06
1.924048	110	14	23.28841	0.573993	32	53	14.50305	3.0411	37	8.04E-06
1.923739	110	13	19.57943	0.576314	33	1	13.30928	3.059993	38	8.28E-06
1.923427	110	12	15.21834	0.578687	33	9	22.84024	3.079153	39	8.80E-06
1.923112	110	11	10.239	0.581112	33	17	42.86312	3.098578	40	9.57E-06
1.923008	110	10	48.91568	0.581913	33	20	28.19118	3.104971	307	9.86E-06
1.923321	110	11	53.44936	0.579496	33	12	9.714206	3.085651	308	9.03E-06
1.923631	110	12	57.40006	0.577129	33	4	1.352102	3.066587	309	8.43E-06
1.923938	110	14	0.735038	0.574811	32	56	3.338696	3.047781	310	8.09E-06
1.924242	110	15	3.420138	0.572545	32	48	15.9	3.029233	311	8.04E-06
1.924543	110	16	5.419501	0.570331	32	40	39.25199	3.010948	312	8.28E-06
1.92484	110	17	6.695243	0.568171	32	33	13.59807	2.992927	313	8.78E-06
1.925133	110	18	7.207115	0.566064	32	25	59.12613	2.975174	314	9.49E-06

对于附件三,共有 16 组可能的组合可以较好拟合原始数据,结果如表 6 所示.16 组结果基本围绕两个最优解(黄色标注)分布,故可以认定这两组最优解即为满足附件三数据

的结果。

同附件二中结果分析，认为两组解为同一观测点采用同一直杆在不同日期下所测的结果。测量地经度 $110^{\circ}14'23''E$ ,纬度 $32^{\circ}53'15''N$ ,杆长为3米。测量日期分别为2月7日和11月8日。基本和夏至对称分布，结果符合5.1.3的参数分析。

经过经纬定位后，该测量点位于湖北省西北部，其地理位置如图16所示：



图 16 附件三观测点地理位置

带入此组参数结果，得到的曲线和原始散点拟合程度如图17所示，符合要求。

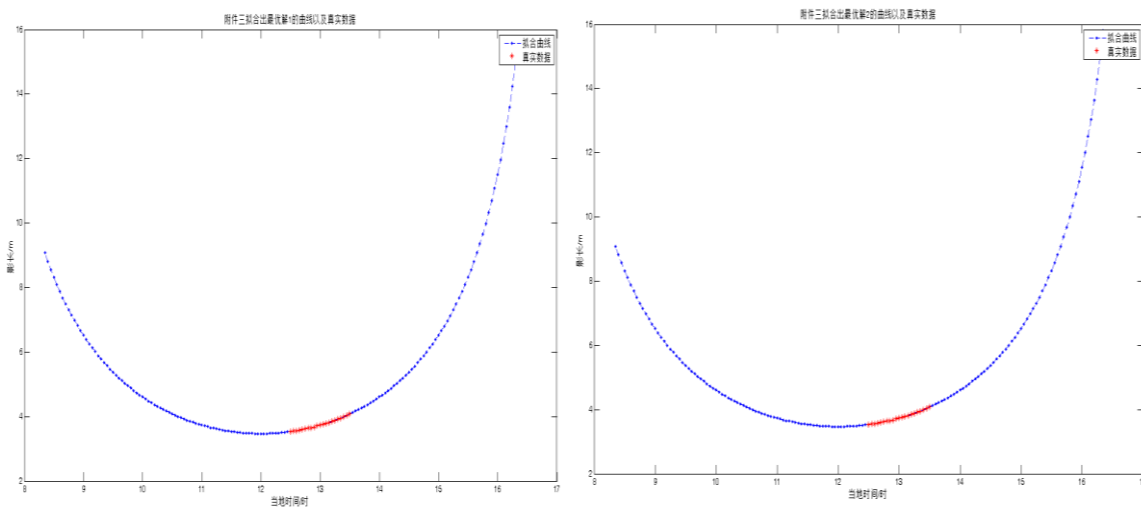


图 17 附件三两种日期下参数拟合图

## 5.3 动态影长定位模型

### 5.3.1 模型分析

由影长参数模型和非线性拟合模型，可以在杆长、影长、测量地经纬度坐标、测量日期、测量时刻的组合下由其中部分量之间的关系计算出其余量，实现根据直杆投影变化求解出其实际地理位置的目的。

在实际生活应用当中，每隔若干分钟去精确测量直杆影子变化并且一一记录是不现实的，更多的情况下是采用摄像机对待测直杆投影变化进行视频录制，而其中关键

则是如何根据录制的视频提取出有效信息，以代入影长参数模型和非线性拟合模型进行精确定位计算。

由于影长变化速度非常缓慢，对于连续拍摄的视频，无需对每一帧图像进行信息提取，而是需要每隔一定的时间间隔进行图像截取分析。对于提取后的静态图像，则需要一定的图像处理基础上将投影较为清晰的和背景区分，同时将已知的直杆长度信息转化为像素点长度，采用比例计算出影子长度。其中，因为投影起始点位置不变，故确定其投影顶点位置并转化为实际长度是处理的关键。

最后，考虑照片拍摄在三维空间下，相机摆放的位置和杆竖立位置在空间呈一定角度，应对图像读取出的影子长度进行修正处理，消除三维空间视角差异影响，使其更加接近于实际长度。

在得到若干帧图像中影子长度数据后，结合每一帧图片的拍摄时间，将其转化为和问题二、问题三相同的拟合问题，在非线性拟合处理模型的计算下确定拍摄地点。

### 5.3.2 模型建立

#### 第一步 视频截取

附件四中所给视频时长为 40 分 40 秒，利用 Matlab 每隔 1 分钟截取一张视频图片，共计 40 张。

原视频截图分辨率为 1920×1080，若根据像素点灰度值转化为矩阵，则处理过程将过于复杂。结合第一帧和最后一帧图片，将整个动态过程中影子变化范围用矩形框进行标定，并由此截取其中面积为 840×40 的像素区域进行下一步处理分析。

#### 第二步 灰度图转化

观察截取区域，可以发现地面颜色对于投影范围确立有一定程度影响，所以对截图区域进行图像处理，以实现淡化背景、增强投影的目的。

因灰度图可以将色彩的红绿蓝三要素转化为单一的灰度值，便于计算分析的同时增强图像的明暗关系，故首先将每个像素点的 RGB 值转化为相应的灰度值，采用方法为灰度值的整数转化公式：

$$G = (R \times 299 + G \times 587 + B \times 114 + 500) / 1000 \quad (36)$$

此时，截图区域转化为一个大小为 840×40 的灰度值矩阵，便于进行下一步数值化处理。

#### 第三步 二值化处理

在灰度图的基础上，利用 Matlab 增大图像对比度，使截图区域的色彩差异可以更清晰显示。在此基础上，对图片像素点灰度值进行统计，绘制灰度值的频数分布直方图，以清晰观察图片的明暗关系分布。

其中，依据时间先后顺序得到的第 10、20、30、40 张图片灰度值频数分布直方图如图 18 所示：

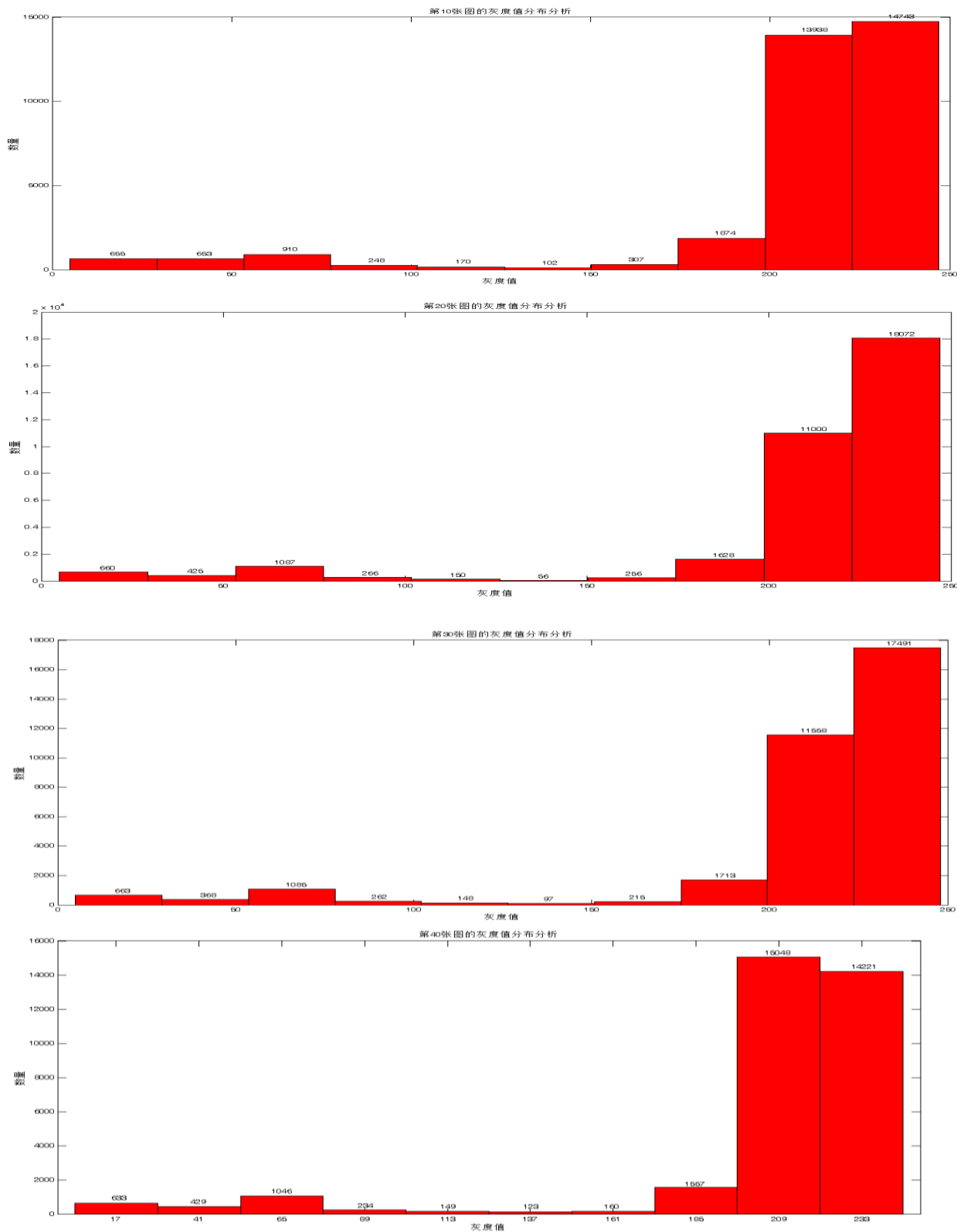


图 18 第 10、20、30、40 张图片灰度值频数分布直方图

因为在灰度图中，0 代表黑色，255 代表白色，结合以上频数分布直方图的统计数据可以发现大部分像素点灰度值接近白色，小部分接近黑色，分布在中间灰度的点极少。为进一步突出像素点的明暗对比关系，结合频数分布直方图结果，定义阈值 T 的取

值范围为[175,215]，对图像进行二值化处理。

对于该区域内的像素点灰度值  $G$  二值化，结果  $G'$  为：

$$G' = \begin{cases} 0, G \in T \\ 255, G \notin T \end{cases} \quad (37)$$

第 10、20、30、40 张图片在截取后进行灰度图转化和二值化对比结果如图 19 所示：

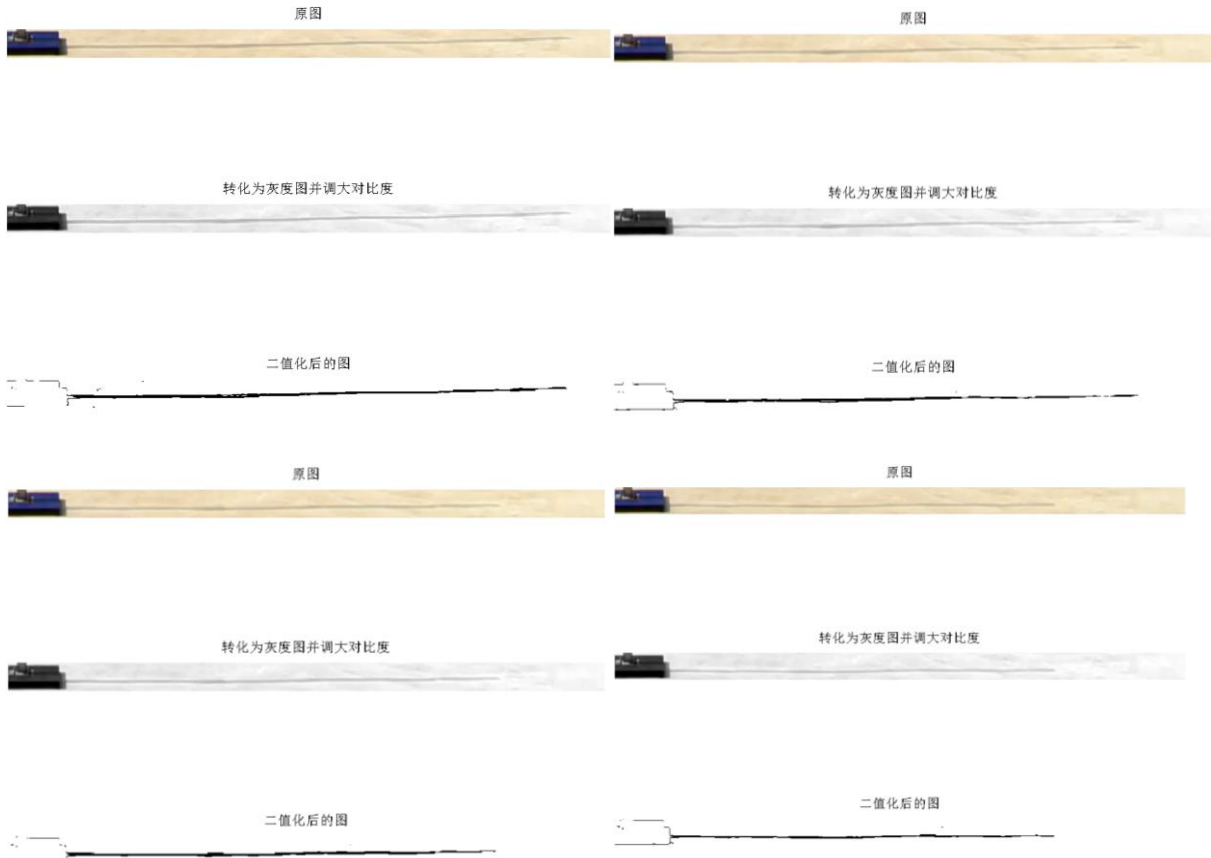


图 19 第 10、20、30、40 张图片截图区原图、灰度图、二值化对比图

#### 第四步 顶点扫描

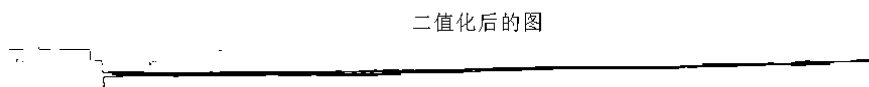


图 20 第 10 张图片截图区二值化结果

由图 20，可以清晰观察二值化之后的图像直观反映出投影形状和投影顶点位置，且除直杆投影和底座边缘轮廓外，图像无地面干扰点影响；故确立直杆顶点坐标可以采用矩阵扫描分析法。其流程如下：

第一步，构建二值化图像灰度矩阵  $M$  如下：



$$M = \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,840} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{40,1} & G_{40,2} & \dots & G_{40,840} \end{bmatrix} \quad (38)$$

其中  $G_{i,j}$  表示第  $i$  行第  $j$  列元素的灰度值。

第二步，按列扫描。从右上角第一个像素点的坐标 (1, 840) 开始，按纵坐标  $j$  从大到小的顺序对第一行进行扫描。当扫描的像素点灰度值从 255 (白) 突变为 0 (黑) 时，记录此点坐标并停止扫描，否则向左移动检查下一点。

第三步，按行平移。当一行之中所有像素点均被扫描但是仍不满足第二步内扫描停止条件时，从本行最左端像素点移动到下一行最右端的像素点，按照步骤二的顺序继续进行分析。

第四步，输出停止点坐标，即为投影顶点。

### 第五步 投影长度计算

对视频中直杆的顶点和其与底座的衔接点进行像素点坐标读取，在  $1920 \times 1080$  的原图矩阵中，其杆顶杆底坐标之差为：

$$875 - 204 = 671 \quad (39)$$

可以认为在像素图中，杆长为 671 个像素值。

因题目中已知杆长为 2 米，故像素点和实际长度对应值为 1: 0.003，即照片中一个像素点的长度对应实际尺寸中 0.003 米。

按照第四步流程对 40 张图片依次扫描，并依据比例关系得到的实际影长计算结果如下：

表 7 视频截图中投影顶点坐标和影长

图片编号	影子顶点横坐标 x	影子顶点纵坐标 y	影长像素	实际影长
1	8	827	827.0387	2.437981
2	10	823	823.0608	2.425933
3	10	818	818.0611	2.410979
4	10	812	812.0616	2.393034
5	10	807	807.062	2.37808
6	11	800	800.0756	2.357107
7	12	797	797.0903	2.348099
8	12	792	792.0909	2.333145
9	12	787	787.0915	2.318191
10	14	780	780.1256	2.297195
11	14	777	777.1261	2.288222
12	15	772	772.1457	2.273244
13	15	769	769.1463	2.264271
14	16	765	765.1673	2.252287
15	16	759	759.1686	2.234341
16	16	752	752.1702	2.213404
17	16	747	747.1713	2.198449
18	18	744	744.2177	2.189446
19	18	739	739.2192	2.174491
20	18	735	735.2204	2.162527

21	18	728	728.2225	2.14159
22	20	726	726.2754	2.135594
23	20	723	723.2766	2.126621
24	20	718	718.2785	2.111666
25	20	711	711.2812	2.090729
26	22	709	709.3412	2.08475
27	22	705	705.3432	2.072785
28	22	699	699.3461	2.054839
29	22	691	691.3501	2.030911
30	22	687	687.3522	2.018947
31	24	684	684.4209	2.009995
32	24	674	674.4272	1.980085
33	24	672	672.4284	1.974103
34	24	666	666.4323	1.956157
35	25	667	667.4684	1.959166
36	24	663	663.4342	1.947184
37	26	659	659.5127	1.93526
38	26	655	655.5158	1.923296
39	26	651	651.519	1.911333
40	26	647	647.5222	1.899369

### 第六步 修正系数

考虑拍摄时三维空间尺寸长度和二维平面的差异，以及拍摄时光线、角度、高度、测量误差等因素的影响，对计算出的影长应考虑添加一修正系数。

最大的误差来自于三维空间和二维图像之间因空间角度差异而引起的长度测量误差，为进行这一误差的修正，对单帧图像进行如下分析：



图 21 单帧图像透视误差分析

由图 21 可知，从左右两个箱子的顶点沿边长向远方各引三条线可以分别交于 A、B 两点，则过 A、B 两点的连线即为视平线。

记 O 点为影子自底座边沿延伸的起点，OC 为影子在图中的长度，过 O 点做视平线的平行线 OD，并且以 O 为圆心，影长 OC 为半径，画一弧线交 OD 于 E 点。

测量 DE 的长度为 10 像素，故：

$$OC=OE=OD+DE=OD+10 \quad (40)$$

利用 (40) 进行简单的透视误差修正，则认定投影实际长度  $l$  比测量长度小  $10 \times 0.003 = 0.03$  米，即：

$$l = l_0 - 0.03 \quad (41)$$

### 第七步 代入计算

根据计算出来的影长和时刻对照关系,结合测量日期,直杆长度等已知条件,类比于第二,利用影长参数模型和非线性拟合模型,可以计算确定出测量地点。

当拍摄日期未知时，类比于第三问，可以求解出多个参数组合。

### 5.3.3 模型求解

#### 测量日期已知

根据视频左上角的测量日期，确定为 2015 年 7 月 13 日，则代入模型，计算出的测量地点为： $40^{\circ}36'57''N, 111^{\circ}14'26''E$ 。

经过经纬定位后，该测量点位于内蒙古自治区呼和浩特市，其地理位置如图 22 所示：



图 22 附件四测地点地理位置

#### 测量日期未知

和问题三采用同样算法，当测量日期未知时，代入已知数据，设定误差衡量标准  $r$  为：

$$r < 9.35 \times 10^{-4} \quad (42)$$

求解出一共 52 组数据组合，其日期从 2015 年 5 月 29 日到 2015 年 7 月 18 日均满足上述误差范围，其中包含视频原有日期。

52 组可能解中，最优解为 2015 年 6 月 23 日在  $40^{\circ}55'42''N, 110^{\circ}8'37''E$  进行测量。经过经纬定位后，该测量点位于内蒙古自治区包头，其地理位置如图 23 所示：



图 23 附件四最优解测地点地理位置

#### 5.4 曲线拟合的可靠性分析

对于实验测量值  $y_i$  和拟合曲线上数值  $f(x_i)$ , 定义其残差为:

$$r_i = f(x_i) - y_i (i=1, 2, \dots, n) \quad (43)$$

其残差均值  $\mu$  为:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (44)$$

定义残差的标准差为:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2} \quad (45)$$

定义标准化残差为:

$$\sigma^* = \frac{r - \mu}{\sigma} \quad (46)$$

因  $\sigma^*$  服从标准正态分布  $N(0,1)$ , 若:

$$|\sigma^*| > 2 \quad (47)$$

则认为该数据是异常数据，将减弱曲线拟合的可靠程度。

对于  $n$  个参与拟合的数据，若其中有  $m$  个数据为异常数据，则置信度的修正因子为:

$$\alpha = \frac{n-m}{n} \times 100\% \quad (48)$$

因曲线拟合本身的可靠程度为 95%，故对于一组数据，其整体的可靠程度为:

$$\beta = 95\% \alpha \quad (49)$$

我们认为当可靠程度  $\beta > 90\%$  即可认定曲线拟合可靠，对上述模型中参与拟合的数据进行可靠性计算，其结果列表如下：

表 8 曲线拟合可靠性列表

曲线	可靠程度
附件一	87.88%
附件二	87.88%
附件三	90.25%
第四题问题一	90.25%
第四题问题二	95% (最优解)

## 5.5 误差分析

经过分析认为上述模型误差主要存在于视频处理和像素点读取的阶段。读取像素点的操作存在于杆长和影长的计算中，且认为杆长和影长的像素点长度可以变化的范围为  $\pm 10$  像素。

对于实际影长  $S$ ，可以认为其计算公式为：

$$S = \frac{s}{l} \times L = \frac{s}{l} \times 2 \quad (50)$$

其中， $S$ 、 $L$  为实际的影长和杆长， $s$ 、 $l$  为像素长度下的影长和杆长。

考虑  $s$ 、 $l$  的像素测量变化，定义影长最大长度和最小长度分别为：

$$S_{Max} = \frac{s+10}{l-10} \times 2 \quad (51)$$

$$S_{Min} = \frac{s-10}{l+10} \times 2 \quad (52)$$

根据上述公式，利用非线性拟合模型，求得：

最大影长对应的最优经纬度：108.7544E, 42.8083N

最小影长对应的最优经纬度：110.6684E, 40.8702N

通过计算并比较上述两点相对问题四第二问中最优解的距离，得出最大偏差距离为 252 公里，从而得出可行解位于以最优解为圆心，252 公里为半径的圆域内，且由表 8 可知其可信度为 95%。

## 六、模型评价及改进

### 6.1 模型评价

本文从视频拍摄信息分析这一大背景下，通过构建影长参数模型、非线性拟合模型以及动态影长定位模型，从浅入深层层深入分析了如何通过视频中参照物影长变化确定拍摄时间、拍摄地点等信息的方法。

影长参数模型通过太阳高度角巧妙地将杆长、影长等实际测量数据和测量时间、测量地点等因素相连接，通过公式 (6) 成功给出各参数间的函数对应关系，为非线性拟合

提供理论基础。

非线性拟合模型则从应用角度将实验得出的散点数据利用以最小二乘法为核心的优化方法进行曲线拟合，从而求解出未知的各个参量值。再进行逆推，通过赤纬角、时角等参数与测量地经纬度和测量时间的关系，求解出所需信息。

动态影长定位模型则在前两模型基础上，增加图像处理 and 有效信息提取的流程，将三维、动态的视频转化为二维静态有效投影区域，并利用遍历二值化后的灰度矩阵确定投影顶点像素。这一模型是整个流程的核心，在考虑实际应用时多种复杂因素引起的误差，对其进行较为详细的误差分析，提高定位的精确性。

综上所述，本文在考虑实际应用的基础上对视频投影定位问题进行完整的建模分析，并就其精确性进行专门探讨，增强其可信度，具有较强的实用价值。

## 6.2 模型改进

本文虽然结合实际应用构建三个模型分块并且进行相应的定量计算，但精确程度和误差因素考虑和消除上仍有一定可以改进的空间：

(1) 对于每一个实际问题，题目中所给数据较少，仅能完成拟合部分，缺乏额外数据进行检验，故若有更多实验数据，可以对模型精确性进一步提高。

(2) 所有人为读取的数据都有存在测量误差，故可以对原始数据准确性进一步提高。

(3) 在影长参数模型中，可以进一步考虑大气折射、太阳方位角等因素影响，对模型进一步修正。

(4) 在非线形拟合模型的 Gauss—Newton 法求解下降方向时，可以考虑采用 Levenberg-Marquardt 法修正每次的迭代参数，使其更加精确。

(5) 在动态影长模型中可以考虑深入分析三维空间因透视关系引起的长度测量变化，必要时可以更换摄像机角度或者同时采用多台摄像机进行拍摄，从而求取出更为精确的投影长度。

## 七、参考文献

- [1] 王君恒, 郭雷, 王健楠, 王彦国, 地球扁率在其历史上的变化, 地球物理学进展, 25 (1): 143-150 页, 2010。
- [2] 百度百科, 日地距离, <http://baike.baidu.com>, 2015 年 9 月 11 日。
- [3] 杜春旭, 王普, 马重芳, 吴玉庭, 申少青, 一种高精度太阳位置算法, 新能源与工艺, 2010 (2): 41-44 页, 2010。
- [4] IQBAL M., An Introduction to Solar Radiation, New York: Academic Press, 1983。
- [5] 百度百科, 北京时间, <http://baike.baidu.com>, 2015 年 9 月 12 日。
- [6] 姜启源, 谢金星, 邢文训, 张立平, 大学数学实验 (第二版), 北京: 清华大学出版社, 2010。

## 八、附录

本论文全部采用 matlab R2014a 编写程序。

### 1. 求解第一问的主程序

```
%第一问画曲线
%天安门前影子随时间变化
clear all;
theta=(39+54/60+26/3600)/180*pi;%这是北纬
alpha=(116+23/60+29/3600)/180*pi;%这是东经
n=31+28+31+30+31+30+31+31+30+22;%一年中的第 n 天，即 2015 年 10 月 22 日

F=2*pi*(n-1)/365;
delta=0.006918-0.399912*cos(F)+0.070257*sin(F)-0.006758*cos(2*F)+...
    0.000907*sin(2*F)-0.002697*cos(3*F)+0.00148*sin(3*F);%更高精度的计算赤纬角

time=9:0.1:15;%北京时间由 9 点到 15 点
Th=time+(-120+alpha/pi*180)/15;%真太阳时,time 为北京时间
t=(Th-12).*15/180*pi;%太阳时角
L=3;%杆子长度

h=asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l=L./tan(h);
h=plot(time,l,'--');xlabel('时间/时');ylabel('影长/m');title('天安门广场 3 米高杆子的影子随时间的变化曲线');
get(h)

%赤纬角随日期变化
n=1:365;
plot(n,Delta(n),'--');xlabel('日期/天');ylabel('赤纬角/°');title('赤纬角随一年 365 天中日期的变化曲线');grid on;axis([0 365 -25 25]);
n1=31+28+21;n2=31+28+31+30+31+22;n3=31+28+31+30+31+30+31+31+23;n4=31+28+31+30+31+30+31+31+30+31+30+22;
text(n1,Delta(n1),'春分日');text(n2,Delta(n2),'夏至日');text(n3,Delta(n3),'秋分日');text(n4,Delta(n4),'冬至日');
hold on;plot(n1,Delta(n1),'r*',n2,Delta(n2),'r*',n3,Delta(n3),'r*',n4,Delta(n4),'r*');
set(gca,'YTick',[-25 -Delta(n2) -20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20 Delta(n2) 25]);

%固定参数，看影长变化
theta0 = 39+54/60+26/3600;%这是北纬
delta0 = -0.1880/pi*180;%2015 年 10 月 22 日对应的赤纬角
L0 = 3;%杆长
t0 = 0;%正午十二点东经 120° 的太阳时角

%影长随纬度的变化
history=[];
for theta = -70 : 1: 70
```

```

        l = Length(theta,delta0,t0,L0);
        history=[history,l];
    end
    plot([-70:1:70],history,'--');xlabel('纬度（规定北纬为正）/° ');ylabel('影长/m');
    title('影长随纬度的变化（北京时间 12:00，太阳时角 0°，赤纬角-10.77°，杆长 3 米）');

    %save Q1_last_Data
    %load Q1_last_Data

    %影长随赤纬角变化
    history=[];
    for delta = -23.5 : 0.1 :23.5
        l = Length(theta0,delta,t0,L0);
        history=[history,l];
    end
    plot([-23.5 : 0.1 :23.5],history,'--');xlabel('赤纬角/° ');ylabel('影长/m');
    title('影长随赤纬角的变化（北京时间 12:00，北纬 39° 54' 26"，太阳时角 0°，杆长 3 米）');

    %影长随太阳时角的变化
    history=[];
    for t = -70 : 1 :70
        l = Length(theta0,delta0,t,L0);
        history=[history,l];
    end
    plot([-70 : 1 :70],history,'--');xlabel('太阳时角/° ');ylabel('影长/m');
    title('影长随太阳时角的变化（北京时间 12:00，北纬 39° 54' 26"，赤纬角-10.77°，杆长 3 米）');

    %影长随杆长的变化
    history=[];
    for L = 0 : 0.1 :15
        l = Length(theta0,delta0,t0,L);
        history=[history,l];
    end
    plot([0 : 0.1 :15],history,'--');xlabel('杆长/m');ylabel('影长/m');
    title('影长随杆长的变化（北京时间 12:00，北纬 39° 54' 26"，赤纬角-10.77°，太阳时角 0°）');

    %save data_Q1

```

## 2. 求解第一问的子程序 1（计算影长）

```

function f = Length(theta,delta,t,L);
% theta 当地纬度,默认输入为角度
% delta 赤纬角,默认输入为角度
% t 太阳时角,默认输入为角度
% L 杆长
% f 返回影子长度
theta = (theta)./180.*pi;%换算成弧度
delta = (delta)./180.*pi;
t = (t)./180.*pi;

```



```

h = asin( sin(theta).*sin(delta)+cos(theta).*cos(delta).*cos(t) );
f = L./tan(h);

```

### 3. 计算赤纬角函数程序

```

function f=Delta(n)
F=2*pi.*(n-1)/365;
delta1=0.006918-0.399912.*cos(F)+0.070257.*sin(F)-0.006758*cos(2.*F)+...
0.000907.*sin(2.*F)-0.002697.*cos(3.*F)+0.00148*sin(3.*F); %更高精度的计算赤纬角
f=delta1./pi.*180;

```

### 4. 求解第二问主程序

```

%利用非线性回归求解参数，第二问
time = 14+42/60:0.05:15+42/60;%时间
l = length1';%影子长度
beta0 = [2.0 0.34 2];%初始值

```

[beta,r,j] = nlinfit(time',l', 'curve2',beta0); %函数原理基于最小二乘拟合法，具体工作理论参见论文 5.2 非线性拟合模型

```

[ll,delta] = nlpredci('curve2',time',beta,r,j);
format long;
disp('经度: ')
beta(1)/pi*180
disp('纬度: ')
beta(2)/pi*180
disp('杆长')
beta(3)

```

```

%较高精度
%东经 108.6679063650662°
%北纬 19.279428319938113°
%杆长 2.035631645830486 米

```

```

%较低精度
% 108.6599 E, 19.2772 N

```

```

%根据求出的经纬度和杆长画曲线
clear all;
load data123;
theta = 19.2794 /180*pi; %这是北纬
alpha = 108.6679 /180*pi; %这是东经，均以弧度表示

```

```

n = 31 + 28 + 31 + 18; %一年中的第 n 天
delta = Delta(n) /180 *pi; %赤纬角，换算成弧度制
time = 9 :0.05: 17;%北京时间由 9 点到 15 点

```

Th = time + (-120 + alpha / pi \* 180 ) /15; %Th 为当地时间，即真太阳时,time 为北京时间，此时 alpha 为弧度制

```

t = ( Th - 12) .* 15 ./ 180 .* pi; %太阳时角，将 t 转化为弧度
L = 2.0356; %杆子长度
h = asin( sin(theta) .* sin(delta) + cos(theta) .* cos(delta) .* cos(t) );

```

```

l_shadow = L ./tan(h);

local = [ 14+42/60 : 0.05 :15+42/60 ] + ( -120 + alpha / pi * 180 ) /15;

plot(Th,l_shadow,'.-');hold on;plot(local,length1,'r*');
xlabel('时间/时');ylabel('影长/m');title('北纬 19° 16' 45.94" 东经 108° 40' 4.46" 影子随时间变化的曲线');
legend('拟合曲线','真实数据');

```

#### 5. 求解第二问子程序（拟合函数）

```

function l=curve2(beta,time)
alpha=beta(1);%设置常量，经度
theta=beta(2);%纬度
L=beta(3);%杆长

Th=time+(-120+alpha/pi*180)/15; %真太阳时,time 为北京时间
t=(Th-12).*15/180*pi;%太阳时角
n=31+28+31+18;%2015 年 4 月 18 日
delta=Delta(n)/180*pi; %赤纬角

h=asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l=L./tan(h);

```

#### 6. 计算可信度主程序

```

clear all;
load data123;
%该函数用于检验结论的可信度
time = 14+42/60:0.05:15+42/60;%视频中的北京时间，每过一分钟变化一次
n = 108;
theta = 19.279428319938113/180*pi;
alpha = 108.6679063650662/180*pi;
f = Length123( theta,alpha,n,time,2.035631645830486);
r = length1 - f';

u = mean(r); %残差均值
sigma = sqrt(sum( (r-u).^2)./40); %残差的标准差
sigma1 = (r - u) ./sigma; %标准化残差，应当符合标准正态分布 N(0, 1)
location = find(abs(sigma1)>2);
Index = 0.95*(1-size(location,1)/40); %检验拟合的可信度

```

#### 7. 计算可信度子程序

```

function f = Length123(theta,alpha,n,time,L)
delta = Delta(n);
Th = time + ( -120 + alpha/pi*180 )/15; %真太阳时,time 为北京时间
t = ( Th - 12 ).*15./180*pi;%太阳时角

h = asin( sin(theta).*sin(delta)+cos(theta).*cos(delta).*cos(t) );
f = L./tan(h);

```

#### 8. 求解第三问附件二程序

```

%针对问题 3 的附件二
clear all;

```

```

load data123

tic
%初始化一些参数
time = 12 + 41/60 : 0.05 : 13 + 41/60 ;
l = length2 ;
alpha0 = 1.3920 ; %初始化经度
theta0 = 0.6970 ; %初始化纬度
l0 = 2.0032 ; %初始化杆长

history = []; h_beta = []; h_rr = [];
global n;

for n = 1:365

    beta0 = [alpha0 theta0 l0] ;
    [beta,r,j] = nlinfit(time',l,'NewQ3_curve',beta0); %函数原理基于最小二乘拟合法，具体
    工作理论参见论文 5.2 非线性拟合模型
    [ll,delta] = nlpredci('NewQ3_curve',time',beta,r,j);

    rr = sqrt(sum(r.^2))/size(r,1) ; %计算残差平方和的开方值，然后再平均
    h_rr = [ h_rr;rr ] ; %记录该值

    if rr>7e-6 continue; %满足误差允许范围就记录下来
    else history = [history;beta , n ,rr ] ;
    end

end

toc
history;
%x=degrees2dms(history(:,1)/pi*180);
%y=degrees2dms(history(:,2)/pi*180);
%save Q3_dms3 x y 转化为度分秒保存

%检查拟合曲线的情况
best = history(14,:);
alpha = best(1);
theta = best(2); %代入最优解
nn = best(4); %一年中的第 n 天

F = 2*pi*(nn-1)/365;
delta = 0.006918-0.399912*cos(F)+0.070257*sin(F)-0.006758*cos(2*F)+...
    0.000907*sin(2*F)-0.002697*cos(3*F)+0.00148*sin(3*F); %更高精度的计算赤纬角

time = 11:0.05:19; %北京时间由 9 点到 15 点
Th = time+(-120+alpha/pi*180)/15; %真太阳时,time 为北京时间
t = (Th-12).*15/180*pi; %太阳时角
L = best(3); %杆子长度

h = asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l_shadow = L./tan(h);

```

```

Beijing = [12 + 41/60 : 0.05 : 13 + 41/60 ];
Local = Beijing + (-120 + alpha/pi*180)/15;
plot(Th,l_shadow,'.-');hold on;plot(Local,length2,'r*'); %当地时间影子曲线
xlabel('当地时间/时');ylabel('影长/m');title('附件二拟合出最优解 2 曲线以及真实数据');
legend('拟合曲线','真实数据');
%save Q3_history2 history

```

%根据检验，拟合出的第一个时间点的最优解和第二个时间点的最优解在地球上相差 9 公里左右

## 9. 求解第三问附件三程序

%针对问题 3 的附件三

```
clear all;
```

```
load data123
```

```
tic
```

%初始化一些参数

```
time = 13 + 9/60 : 0.05 : 14 + 9/60 ;
```

```
l = length3 ;
```

```
alpha0 = 1.93 ; %初始化经度
```

```
theta0 = 0.58 ; %初始化纬度
```

```
l0 = 3 ; %初始化杆长
```

```
history = []; h_beta = []; h_rr = [];
```

```
global n;
```

```
for n = 1:365
```

```
beta0 = [alpha0 theta0 l0];
```

[beta,r,j] = nlinfit(time,l,'NewQ3\_curve',beta0); %函数原理基于最小二乘拟合法，具体工作理论参见论文 5.2 非线性拟合模型

```
[ll,delta] = nlpredci('NewQ3_curve',time',beta,r,j);
```

```
rr = sqrt(sum(r.^2))/size(r,1); %计算残差平方和的开方值，然后再平均
```

```
h_rr = [ h_rr;rr ]; %记录该值
```

```
if rr>1e-5 continue; %满足误差允许范围就记录下来
```

```
else history = [history;beta , n ,rr];
```

```
end
```

```
end
```

```
toc
```

```
history
```

```
save Q3_history3 history
```

```
%x=degrees2dms(history(:,1)/pi*180);
```

```
%y=degrees2dms(history(:,2)/pi*180);
```

```
%save Q3_dms3 x y 转化为度分秒保存
```

%检查拟合曲线的情况

```
best = history(13,:);
```

```

alpha = best(1);
theta = best(2);%代入其中一个解
nn = best(4); %一年中的第 n 天

F = 2*pi*(nn-1)/365;
delta = 0.006918-0.399912*cos(F)+0.070257*sin(F)-0.006758*cos(2*F)+...
    0.000907*sin(2*F)-0.002697*cos(3*F)+0.00148*sin(3*F); %更高精度的计算赤纬角

time = 9:0.05:17;%北京时间由 9 点到 15 点
Th = time+(-120+alpha/pi*180)/15; %真太阳时,time 为北京时间
t = (Th-12).*15/180*pi;%太阳时角
L = best(3);%杆子长度

h = asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l_shadow = L./tan(h);
Beijing = [13 + 9/60 : 0.05 : 14 + 9/60 ];
Local = Beijing + (-120 + alpha/pi*180)/15;
plot(Th,l_shadow,'-');hold on;plot(Local,length3,'r*'); %当地时间影子曲线
xlabel('当地时间/时');ylabel('影长/m');title('附件三拟合出最优解 2 的曲线以及真实数据');
legend('拟合曲线','真实数据');

%save Q3_history3 history

```

%根据检验，拟合出的第一个时间点的最优解和第二个时间点的最优解在地球上相差 9 公里左右

#### 10. 求解第四问的第一小问主程序

```

clear all;
fileName = 'Appendix4.avi';
Obj = VideoReader(fileName); %获取视频对象
Frames = Obj.NumberOfFrames;% 帧的总数
time = 40*60 + 40;%视频总时长
n = 40;%所需帧数
interval = floor((Frames)/time*60); %取帧间隔
i = 1;%计数器

for k = 1 : interval:Frames% 读取数据
    frame = read(Obj,k); %每过 1500 帧(即 1 分钟)，读取一次，共读取 40 组数据
    imwrite(frame,strcat(num2str(i),'.bmp'),'bmp'); % 保存帧
    i = i + 1;
end

history=[];
for i = 1 : n
    [x_axis,y_axis]=success(i);
    history=[history;x_axis,y_axis];
end

% axis_history history

%三人读取杆子底部坐标并保存
clear all;

```

```

load axis_history
gan_x(1)=20;gan_y(1)=14;
gan_x(2)=22;gan_y(2)=14;
gan_x(3)=20;gan_y(3)=8;
%save gan_axis gan_x gan_y

%原图读取杆子底部
gan_xxx(1)=869;gan_yyy(1)=875;
gan_xxx(2)=871;gan_yyy(2)=874;
gan_xxx(3)=872;gan_yyy(3)=875;

gan_xx(1)=894;gan_yy(1)=203;
gan_xx(2)=894;gan_yy(2)=205;
gan_xx(3)=895;gan_yy(3)=204;
%save gan_high gan_xxx gan_yyy gan_xx gan_yy

ganx=mean(gan_x);gany=mean(gan_y);
pixel4=sqrt((history(:,1)-ganx).^2+(history(:,2)-gany).^2);
gan_pixel=mean(gan_yyy)-mean(gan_yy)+10;
rate=pixel4./gan_pixel;
length4=rate.*2;%得到第四问影子长度
%save length4 length4
length4=length4 - 0.03;%修正影子长度

unit = 2/gan_pixel; %一个像素在实际中的单位长度 0.0029 米
error = 10;%认为误差为 10 像素
Max_length = ( pixel4 + error )./( gan_pixel - error ) .* 2; %同样方法，计算出经度
109.9565°，纬度 42.4816°
Min_length = ( pixel4 - error )./( gan_pixel + error ) .* 2; %同样方法，计算出经度
111.7696°，纬度 40.5024°

%赤道周长 40075.7km,一度相差 40075.7/360=111.3214km。

%save length4 length4
%利用非线性回归求解参数
length4=rate.*2;%得到第四问影子长度
length4=length4 - 0.03;%修正影子长度
time = 8+54/60+6/3600:1/60:9+33/60+6/3600;%视频中的北京时间，每过一分钟变化一次
beta0 = [1.94 0.71];%初始值
flag=0;
[beta,r,j] = nlinfit(time',length4,'curve4',beta0);
[ll,delta] = nlpredci('curve4',time',beta,r,j);
beta./pi*180
u = mean(r);%残差均值
sigma = sqrt(sum( (r-u).^2)./40);%残差的标准差
sigma1 = (r - u) ./sigma;%标准化残差，应当符合标准正态分布 N(0, 1)
location = find(abs(sigma1)>2);
Index = 0.95*(1-size(location,1)/40);%检验拟合的可信度

answer1=beta(2)/pi*180;
answer2=beta(1)/pi*180;

```

```

%save final_result1 answer1 answer2
theta = beta(2); %最终结果之纬度
alpha = beta(1); %经度

n = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 13;%2015 年 7 月 13 日
delta = Delta(n)/180*pi; %赤纬角
time = 8 : 0.1 : 17;%北京时间由 8 点到 15 点
Th = time + ( -120 + alpha/pi*180 )/15; %真太阳时,time 为北京时间
t = ( Th - 12 ).*15./180*pi;%太阳时角
L = 2;%杆子长度

h = asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l_shadow = L./tan(h);
Beijing = 8 + 54/60 + 6/3600 : 1/60 : 9 + 33/60 + 6/3600;
local = Beijing + ( -120 + alpha/pi*180 ) /15;
plot(Th,l_shadow,'-');hold on;plot(local,length4,'r*');xlabel('当地时间/时');ylabel('影长/m');
title('拟合曲线和提取出的影长数据');
legend('拟合曲线','从视频提取的影长');

```

#### 11. 求解第四问的第一小问子程序（计算影子顶点坐标）

```

function [x_axis,y_axis]=success(n)
    I1 = imread(strcat(num2str(n),'.bmp')); %读取相邻一分钟的图像
    I1 = imcrop(I1,[850,860,839,39]); %裁剪图像

    xz = I1 ;
    x = rgb2gray(xz);
    x1 = imadjust(x);%提高对比度
    x2 = x1;

    T1 = 175; %比较完美
    T2 = 215; %取阈值

    for k = 1 : size(x2,1)
        for j = 1 : size(x2,2)
            if x2(k,j) < T2&& x2(k,j)> T1    x2(k,j) = 0;
            else    x2(k,j) = 255;
            end
        end
    end

    subplot(311);imshow(I1); title('原图');
    subplot(312);imshow(x1); title('转化为灰度图并调大对比度');
    subplot(313);imshow(x2); title('二值化后的图');
    saveas(gcf,strcat('第四问影子图像处理',num2str(n)),'.png')

    flag = 0;
    for j = size(x2,2) : -1 :1
        if flag == 1 break;end
        for i = 1 : size(x2,1)
            if flag == 1 break;
            elseif (x2(i,j)==0) x_axis=i;y_axis=j;flag=1;break;end
        end
    end

```

```
end
```

#### 12. 求解第四问第一小问子程序（计算阈值）

```
l1 = imread(strcat(num2str(40),'.bmp')); %读取相邻一分钟的图像
l1 = imcrop(l1,[850,860,839,39]); %裁剪图像

xz = l1 ;
x = rgb2gray(xz);
x1 = imadjust(x);%提高对比度
x2 = x1;

%下面这一段为灰度值分析程序
k=1;
for i= 1:size(x,1)
    for j= 1 : size(x,2)
        xxx(k)=x(i,j);k=k+1;
    end
end
colormap(hsv);hist(double(xxx));[nnn,yyy]= hist(double(xxx));title('第 40 张图的灰度值分布分析');xlabel('灰度值');ylabel('数量');
j=1;
for i = 16 :24.1:240
    text(i,nnn(j)+300 ,num2str(nnn(j)));j=j+1;
end
```

#### 13. 求解第四问第一小问子程序（拟合曲线）

```
function l=curve4(beta,time)
alpha=beta(1);%设置常量， 经度
theta=beta(2);%纬度
L=2;%杆长

Th = time+(-120+alpha/pi*180)/15; %真太阳时,time 为北京时间
t = (Th-12). *15/180*pi;%太阳时角
n = 31+28+31+30+31+30+13;%2015 年 7 月 13 日
delta = Delta(n)/180*pi; %赤纬角

h=asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l=L./tan(h);
```

#### 14. 求解第四问第二小问主程序

```
%针对问题 4 的第二部分问题
clear all;
load length4;
warning off;

tic
%初始化一些参数
time = 8+54/60+6/3600:1/60:9+33/60+6/3600;
l = length4 ;
alpha0 = 1.9020 ; %初始化经度
theta0 = 0.6970 ; %初始化纬度
```



```

history = []; h_beta = []; h_rr = [];
global n;

for n = 1:365

    beta0 = [alpha0 theta0];
    [beta,r,j] = nlinfit(time',l,'NewQ4_curve',beta0); %函数原理基于最小二乘拟合法，具体
工作理论参见论文 5.2 非线性拟合模型
    [ll,delta] = nlpredci('NewQ4_curve',time',beta,r,j);

    rr = sqrt(sum(r.^2))/size(r,1);%计算残差平方和的开方值，然后再平均
    h_rr = [ h_rr;rr ]; %记录该值

    if rr>9.35e-4 continue; %满足误差允许范围就记录下来
    else history = [history;beta , n ,rr ];
    end
end

toc
history;
%save final2_Q4 history
%x=degrees2dms(history(:,1)/pi*180);
%y=degrees2dms(history(:,2)/pi*180);
%save Q3_dms3 x y 转化为度分秒保存

%检查拟合曲线的情况
best = history(26,:);
alpha = best(1);
theta = best(2);%代入最优解
nn = best(3); %一年中的第 n 天

F = 2*pi*(nn-1)/365;
delta = 0.006918-0.399912*cos(F)+0.070257*sin(F)-0.006758*cos(2*F)+...
0.000907*sin(2*F)-0.002697*cos(3*F)+0.00148*sin(3*F); %更高精度的计算赤纬角

time = 8:0.1:17;%北京时间
Th = time+(-120+alpha/pi*180)/15; %真太阳时,time 为北京时间
t = (Th-12).*15/180*pi;%太阳时角
L = 2;%杆子长度

h = asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l_shadow = L./tan(h);
Beijing = [8+54/60+6/3600 : 1/60 : 9+33/60+6/3600 ];
Local = Beijing + (-120 + alpha/pi*180)/15;
plot(Th,l_shadow,'.-');hold on;plot(Local,length4,'r*'); %当地时间影子曲线
xlabel('当地时间/时');ylabel('影长/m');title('最后一问日期未知拟合出最优解曲线，认为最优
日期在 6 月 22 日');
legend('拟合曲线','从视频中获取的影长数据');
%save Q3_history2 history

```

根据检验，拟合出的第一个时间点的最优解和第二个时间点的最优解在地球上相差 9 公里左右

```
answer1=degrees2dms(history(:,1)./pi.*180);
answer2=degrees2dms(history(:,2)./pi.*180);
```

15. 求解第四问的第二小问子程序（拟合曲线）

```
function l = NewQ4_curve(beta,time);
global n;
alpha = beta(1);%设置常量， 经度
theta = beta(2);%纬度
L = 2 ;%杆长

Th = time+(-120+alpha/pi*180)/15; %真太阳时,time 为北京时间
t = (Th-12).*15/180*pi;%太阳时角

F = 2*pi*(n-1)/365;
delta = 0.006918-0.399912*cos(F)+0.070257*sin(F)-0.006758*cos(2*F)+...
        0.000907*sin(2*F)-0.002697*cos(3*F)+0.00148*sin(3*F); %更高精度的计算赤纬角

h = asin(sin(theta)*sin(delta)+cos(theta)*cos(delta)*cos(t));
l = L./tan(h);
```